

none
none

Contribución al estudio de scattering potencial

Alejandro Rivero

Memoria que se presenta para aspirar al
título de Doctor en Ciencias, Físicas.

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA. FACULTAD DE
CIENCIAS. DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA

Contribución al estudio de scattering potencial

Alejandro Rivero

5 de junio de 2001

A mis padres, Alejandro y Maria Pilar;
y a mis hermanicas, Pilar y Yolanda

Agradecimientos

La ejecución de una tesis puede ser un algo personal, pero un trabajo de cinco años difícilmente acaba en buena posada sin el soporte humano, que en esta pequeña nota quiero agradecer.

En primer lugar, a L.J., que como director de tesis ha tenido que aguantar mis veleidades tanto matemáticas como informáticas, y procurar que el flujo del trabajo siguiera su cauce.

En general, al área de Física Teórica de la Universidad de Zaragoza, vulgo DFTUZ, que ha creado un ambiente en el que se puede trabajar a gusto y tertuliar con agrado. De éstos, hay gente a los que les he dado la vara más que a otros, así que dejadme entresacar a Esteve y Asorey, que han aguantado dudas inverosímiles, a Pepín y a Casahorrán, que con cierta frecuencia se han interesado por como iban mis cosas, a Alonso, cuyas preocupaciones son parte de la formación, a los *lattice*ros, en especial Alfonso, de quienes he gorroneado ordenador, y a algunos vinculados remotos, como Mariano o Pepe Gracia, que alguna vez les ha caído aguantar mi extravagante estilo de email. Y a nuestro tercer brazo departamental, el eficiente secretariado, que bastantes preocupaciones nos quita.

Increíble admiración por el aguante de mis compañeros de despachito, Jose Carlos, Carlos y Eduardo, que no me han obligado a callar mis desvaríos sorprendidos en ningún momento, y con los que bastantes veces hemos empalmado discusiones hasta horas de alevosía, incluso de cuando en cuando atrapando a más gente: Victor, Mario...

Mención muy particular a los becarios y precarios con los que comparto generación e inquietud, tanto los de dentro del departamento, como los que ya andan ganándose la vida por el mundo, canta becario errante, desde el Pacífico hasta las Highlands pasando por los Alpes.

Incluyo en este pensamiento a los compañeros de licenciatura y nuestra particular promoción perdida. Sin ningún orden especial: David, M. Millan, J. *rubio* Martinez, César, Berta, Mamen, los Lópezes, Carmela, Rafa... un elenco de universitarios donde los haya.

En el campo de trabajo de la tesis, gente que ha tenido influencia directa en los contenidos de algunos capítulos: Pavel Kurasov, Rodolfo Wehrhahn, Eduardo Follana, y el equipo de Rolf al completo.

Y en la parte virtual, reconocer el uso de software de Salcedo y equipo, de Wolfram Research, de Lamport y Knuth, de Linus, del CERN, de Berkeley, etc. Gratitud pues al software libre.

Fuera de lo académico, abrazos a la familia en general, que de cuando en cuando preguntan qué es lo que esta haciendo el chico. Mención duplicada a mi hermana Pilar se ha tenido que tragar la corrección ortográfica, pero para algo es la de letras.

Hablando de letras, mención también a los de los otros edificios que se han ido preocupando de como iba esto, en especial a Álvaro Capablo, en cuyas conjuntivitis empecé a ver como funcionaba esto de las tesis.

Y en fin, a todos los que me han ido aguantando, agradecimientos globales a repartir a la barra del bar y sus muchachos, a las mujeres y al vino (discretamente), a Tales y a Homero, a Hilbert y a v. Neumann, a Colombia y a la máquina de café,

Y como es de ley, a MEC FPI/FPU AP90.

Prefacio

En esta memoria se estudian diversos problemas de la teoría moderna del scattering potencial, reuniendo estudios realizados por el autor durante el ciclo de doctorado. El trabajo se vertebra sobre la matriz S y sus simetrías, que en una dimensión sobre la recta real completa comienza a anunciar la riqueza estructural que tendrá en teorías con más libertad. Hacemos especial énfasis en las transformaciones bajo cambios de escala y bajo supersimetrías.

Pero todo esto ya lo detallaremos en la introducción. Aquí dejadme señalar con optimismo que la tarea me ha resultado enormemente propedeútica. En cinco años las aportaciones del director, del departamento, y de los cursos y congresos y trenes y fiebres se han ido entremezclando en una sucesión que supongo puede llamarse formadora —al menos lo ha sido en este caso.

En el propio ejercicio indagador, he utilizado tanto técnicas numéricas como analíticas, y de éstas las vinculaciones han ido rebotando del álgebra a la geometría según necesidades o enfoques. Bastante de lo que así he aprendido se refleja en la memoria y de todo ello hablaremos, espero que sin causar demasiada confusión al lector, o al menos sin más pasmo que el que el autor arrastra. De todas formas lo más pasmoso de una tesis no es esto, ni lo son los resultados (se supone un trabajo de iniciación) ni la acumulación de conceptos, sino el mero flujo de su realización.

En nuestro caso, después de un comienzo alternando soldadores y *transputers* alfonsinos con dibujos de solitones, Mathematica y KdVs, nos centramos en el scattering en la línea, calculando estados ligados con integradores en Fortran. En el 92 Rodolfo Wehrhahn nos muestra su teoría de scattering y saltamos a hacer algún que otro cálculo menos numérico. Luego se descansa un poco, algunos cursos fuera mientras pausadamente hacemos nuestros cálculos de polos y deltas, nuevamente Mathematica, hasta que las cosas se precipitan “como fruta madura”: En diciembre de 1993, tras unas cuantas lecciones compostelanas de renormalización, el jefe lanzaba sobre mi mesa un paper de Rajeev y Gupta, y poco después caería una breve nota de un tal Zhao y una polémica sobre las interacciones delta prima que el rigor de Eduardo, entonces ya cohabitante del despacho, ayudó a desmenuzar. Finalmente, en agosto del 94 tropiezo en París con Pavel, su tesis recién acabada — afortunadamente divergiendo de ésta—, con una rigorización de distribuciones completada, que en nuestro cuarto habíamos sólo comenzado a esbozar. En los entreactos, un par de seminarios en los que consigues permanecer despierto y algún que otro curso de verano frío, cuando no de puro invierno silesiano, han conseguido ir colando conceptos en el trabajo. Ya sólo queda animarse a escribir, ordenar ideas, e ir haciendo

crecer el T_EX hasta que acabas teniendo una memoria en las manos, que es lo que aquí se presenta. Entonces al ojear el *draft*, la sensación de haber quedado a pesar de todo a sólo unos milímetros de la unidad temática te embarga y maravilla.

Cuando uno se repone, la tensión entre reescribir y unificar o ampliar y diversificar se controla, y se converge débilmente hasta un punto en el que se pueden poner unas tapas y escribir el Vale. Así que eso, agradezcase a la Naturaleza y a la dirección del trabajo los rasgos unificadores, y caiga sobre mí todo el caos que todavía subyace en sus páginas. Pido de antemano disculpas al lector por los defectos que va a tener que soportar en el desarrollo, y espero que por lo menos haya alguna seccioncilla que le resulte gratificante.

De momento con lo que aquí presentamos tocamos puerto; que seguro es más bien escala de la que partir, ya que con algunas de las páginas desarrolladas acabaremos saltando no se aún en que nueva ruta. Algo se hará.

Zaragoza, 1 de Mayo de 1995

Índice General

none

Prefacio	6
Índice	8
Introducción	13
.1 Conceptos generales de scattering.	15
.2 Scattering en una dimensión.	16
.3 SUSY QM; Scattering y estados ligados	17
.4 La noción de cambio de escala y sus efectos	19
.5 Trayectorias y polología	20
.6 Interacciones de contacto	20
.7 R.G. y potenciales de soporte puntual	22
.8 Posibles desarrollos	23
1 Scattering en una dimensión	25
1.1 Orientación general	27
1.2 Formulación de Deift-Newton	28
1.2.1 Soluciones especiales de la ecuación de Schrödinger	28
1.2.2 Propiedades elementales de S	31
1.2.3 Comportamientos asintóticos	33
1.2.4 S funcional versus S analítica.	34
1.3 Casuística	34
1.3.1 Simetría T	34
1.3.2 Simetría P	35
1.3.3 Simetrías P, T	35
1.3.4 Potenciales de soporte compacto	39
1.3.5 Potenciales de corto alcance	40
1.4 Inverse Scattering	41
1.4.1 Reducción del problema	41

1.4.2	Métodos de Gel'fand-Levitan	41
1.4.3	Ecuación de Marchenko	42
1.4.4	Unicidad del problema inverso	43
2	Supersimetría y scattering en espacios homogéneos	47
2.1	Scattering geométrico.	49
2.1.1	Comparación de geometrías.	49
2.1.2	Espacios simétricos de rango uno	49
2.2	SUSY QM	52
2.2.1	Ejemplo de la delta	53
2.2.2	Efecto de susy en la matriz S	54
2.3	Cálculo de espectros con escaleras SUSY	55
2.3.1	Potenciales equivalentes-Susy al potencial cero	56
2.3.2	Susy en el setup de scattering geométrico	58
2.3.3	Escaleras de potenciales de scattering geométrico	58
3	Trayectorias y polología	63
3.1	Trayectorias de autovalores	65
3.1.1	Resultados para distintos potenciales	65
3.1.2	Justificación en teoría de perturbaciones	69
3.1.3	Efecto del escalado en los defasajes	70
3.2	Polología de la matriz S_k	71
3.2.1	Resultados conocidos. Pozo	71
3.2.2	Movimiento de delta	74
3.2.3	Movimiento de dos y tres deltas	76
3.2.4	Potencial transparente	79
4	Potenciales de soporte puntual	81
4.1	Interacciones de contacto, teoría general	83
4.1.1	Cálculo por conservación de probabilidad	83
4.1.2	Cálculo por extensiones autoadjuntas	85
4.1.3	Cálculo en formulación integral	86
4.1.4	Matriz de Scattering	87
4.1.5	Subfamilias relevantes	88
4.2	El problema de regularización	91
4.2.1	Discusión de Seba	91
4.2.2	Regularización de Carreau	94
4.2.3	Regularización en otros espacios	95
4.3	Potenciales incluyendo funciones generalizadas	96
4.3.1	Generalización del método de Griffiths	96
4.3.2	Posibilidad de distribuciones sobre funciones test discontinuas	97

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	11
4.3.3 Rigorización de Kurasov	98
4.3.4 Aplicación de las ecuaciones de Griffiths generalizadas	100
4.4 Supersimetrías de las interacciones puntuales	102
4.5 Aspectos métricos	104
5 Grupo de renormalización	109
5.1 Renormalización y cambio de escala	111
5.2 Flujo en el espacio de matrices S	113
5.2.1 Implementación	113
5.2.2 Puntos fijos	114
5.2.3 Direcciones relevantes, irrelevantes, marginales . . .	115
5.3 Flujo de la solución conocida	118
5.3.1 Construcción de las trayectorias	118
5.3.2 Análisis. Comparación	121
5.4 Flujo de las regularizaciones	122
5.4.1 Regularización usual	122
5.4.2 Renormalización de la cte de acoplo	123
5.4.3 Regularización con potenciales admisibles	124
5.4.4 Regularizadores exóticos	124
Conclusiones	127
Apéndices	131
Procesos Computacionales	133
Notación empleada	135
Índice de figuras	137
Bibliografía	138

Introducción

Para unos ochenta folios
cuarenta cigarros me bastan

B. Brecht, *Diálogos de Furtivos*

.1 Conceptos generales de scattering.

La teoría de la dispersión, que compara estados asintóticos entrando y saliendo de una región, permite obtener datos de un objeto a partir de medidas indirectas, y es por ello una de las herramientas de análisis dinámico más extendidas. La formulación general puede realizarse tanto en mecánica clásica como en mecánica cuántica o en teoría cuántica de campos, y en esta última cobra importancia vital al ser los experimentos de colisión la fuente más precisa de datos estructurales de la materia. En cualquier caso, el cuerpo de resultados establecidos no es nada desdeñable.

Independientemente de implementaciones concretas, la caracterización de una teoría de scattering incluye un conjunto de estados llamados libres, asociados a un sistema cuya evolución dinámica no presenta interacciones. Estos estados son comparados a los estados de la dinámica con interacción, objeto del problema. El principio de comparación se basa en asumir que los estados de interacción coinciden con los libres “asintóticamente”: usualmente a tiempos o distancias muy alejados de la zona de interacción.

Para obtener una caracterización que ya no incluya la región de interacción, se encadenan dos comparaciones. Primero unos estados libres de entrada (estados *in*) son asociados con los de interacción exigiendo coincidencia a tiempos muy remotos con respecto a los de la colisión. Segundo, estos estados de interacción se hacen corresponder con una segunda serie de estados libres (estados *out*) mediante comparación en tiempos muy posteriores respecto a los de colisión. Esta combinación nos da una regla de empalme: un estado remoto se hace corresponder a un estado «actual» en la interacción, y este mismo estado actual está en correspondencia con un estado futuro. Con ello obtenemos una forma de relacionar estados libres de entrada con estados libres de salida, en una formulación independiente de características internas de la colisión.

Puede dividirse entonces el problema en dos partes: por un lado la comparación entre un estado libre «remoto» (pasado o futuro) y los estados actuales de interacción, y por otro la relación entre estados pasados y futuros. Esto último es lo que se mide realmente es una experiencia física de scattering. La primera parte del problema corresponde a la construcción de un operador de ondas. La segunda es el cálculo del operador de scattering, y se demuestra que éste existe si la primera parte se puede resolver correctamente.

Aunque en algunos casos utilizaremos herramientas más propias de Teoría Cuántica de Campos y en otros más bien conceptos de geometría, esta concepción general de la teoría de dispersión nos va a acompañar en todo el trabajo, en general en su encarnación típica para mecánica cuántica: los estados serán vectores $|\Psi\rangle$ en un espacio de Hilbert H , digamos $L^2(\mathbb{R})$,

sobre el cual el operador de scattering puede representarse como un operador unitario S . Este operador llevará el mayor peso del trabajo, y sólo en algunos casos construiremos explícitamente los estados y sus interrelaciones.

La formulación usual de problemas de dispersión en 3D relaciona estos conceptos a través de diversos elementos técnicos: funciones de Jost, desfases, potenciales, etc. que, como veremos, permiten utilizar la herramienta más apropiada a cada caso: supersimetría, scattering inverso, polología, etc. Nosotros vamos a escoger una formulación 1D que nos permita reflejar estos mismos elementos. Esta postura no tiene sólo un carácter didáctico, sino que está motivada por el aprovechamiento de conceptos desarrollados por los estudiosos del scattering tridimensional, y un requerimiento de consistencia técnica entre los dos desarrollos, ya que hay una relación clara entre el problema unidimensional con simetría par y el tridimensional con simetría rotacional.

.2 Scattering en una dimensión.

Casi todas las peculiaridades del scattering se presentan ya en una dimensión. En efecto, el scattering realista de una partícula bajo un potencial en tres dimensiones se suele estudiar suponiendo un potencial invariante por rotaciones, por lo que el problema es efectivamente unidimensional sobre una semirrecta.

En este trabajo estudiaremos preferentemente el scattering de una partícula moviéndose en la recta real bajo la influencia de un potencial definido en ésta. Es un nivel intermedio entre la simetría esférica y el caso 3D completo. La matriz de scattering $S(\vec{k}_{in}, \vec{k}_{out})$ tiene ya cuatro elementos, correspondientes a $\vec{k}_{in, out} = \text{izda. o dcha.}$ En comparación, el caso tridimensional isótropo tiene un continuo de entradas para cada $|k|$, pero cuando es cocientado por la simetría de rotación queda reducido a una sola entrada para cada valor absoluto del momento, lo que hace el problema más pobre.

Realizaremos todo el planteamiento de la teoría de dispersión más general en la recta en el esquema de Deift-Newton [24, 51], que es el más próximo al establecido para los problemas tridimensionales. Así, para una ecuación de Schrödinger dada, consideramos las llamadas soluciones física y regular, y las funciones y soluciones de Jost con sus respectivas ecuaciones integrales, todas ellas piezas utilizables para construir la matriz S .

El rasgo más interesante es que la función de Jost que conocemos del caso 3D está aquí plenamente representada con su extensión lógica, la matriz de

Jost, cumpliendo la misma propiedad (sección 1.2.1)

$$S_k = J_k q J_{-k}^{-1} q \quad (1)$$

Dado que todo el esquema de Newton es relativamente reciente y, a pesar de sus ventajas para el cálculo del problema inverso, no se recoge completamente en los textos al uso, en el primer capítulo nos extendemos en la presentación un poco más de lo estrictamente necesario para los capítulos siguientes; completamos así un rápido catálogo de referencia a los artículos originales, construyendo la casuística con ejemplos vinculados al resto de nuestro estudio. A lo largo de este compendio presentamos los rasgos básicos del esquema y aprovechamos para compilar un catálogo de resultados acerca del comportamiento asintótico de la matriz S a altas y bajas energías, que nos será útil en los últimos capítulos. Realizamos también un estudio de las condiciones de potencial local, así como las posibles invarianzas bajo inversión temporal (T) o espacial (P). En particular en este último caso se aplica la teoría a casos concretos ($\exp -\mu|x|$, deltas), calculándose las funciones de Jost par e impar de forma consistente con la teoría establecida para el potencial 3D esférico.

Realizamos también una casuística del comportamiento asintótico de S_k a altas y bajas energías. Los ejemplos que presentan Newton y Aktosun [2] de potenciales violando este comportamiento asintótico son interesantes de por sí, y encuentran acómodo como ejemplos relevantes en los siguientes capítulos.

Por completitud incluimos las fórmulas y referencias correspondientes del problema inverso, que si bien no vamos a invocar explícitamente, son necesarias en la construcción consistente del esquema de scattering en espacios simétricos. Además esto nos permite recalcar las condiciones necesarias para la existencia de dispersión por un potencial local (dependiente sólo de las coordenadas de posición), algo que no tenemos por qué esperar que cumplan todas las matrices S , ya que la construcción por criterios de unitariedad o, lo que es lo mismo, de existencia de operadores autoadjuntos describiendo la interacción, es más general que la dispersión por potenciales locales.

.3 Mecánica Cuántica Supersimétrica; scattering y estados ligados.

La introducción de la supersimetría (SUSY) en mecánica cuántica ha iluminado muchos aspectos del scattering. Recientemente se ha observado como conduce a una gran simplificación en el estudio de scattering geométrico para análisis de espacios homogéneos.

En el segundo capítulo exponemos los hechos fundamentales de este desarrollo, usando el concepto de comparación implícito en todo scattering para presentar el estudio, iniciado por Wehrhahn, de espacios simétricos. El esquema de Werhann se puede aplicar tanto resolviendo el problema inverso como reduciendo directamente el laplaciano libre del espacio \mathbb{R}^n al espacio homogéneo simétrico correspondiente, técnica esta última que resulta válida tanto para espacios compactos como no compactos.

Encontramos que esta formulación contiene implícitos términos con superpotenciales, así que una factorización SUSY aparece de forma natural en los dos casos. Esto es muy ventajoso, ya que

la factorización susy muestra como se modifican las autofunciones de un hamiltoniano al añadir o quitar el estado ligado de menor energía.

Mostramos entonces las cuestiones de supersimetría que son relevantes para simplificar el análisis e implementamos este en el caso de espacios simétricos de rango uno.

Para ello realizamos una breve exposición de como se implementa supersimetría *à la* Witten en mecánica cuántica, y vemos como el operador Q de supercarga, además de construir los pares de hamiltonianos supersimétricos, QQ^+ y Q^+Q , vincula los autoestados de uno con los del otro,

$$|\Psi_+ \rangle = Q|\Psi_- \rangle \quad (2)$$

La falta de compañero supersimétrico del vacío $|\Omega \rangle$ en casos de susy exacta es aprovechada para construir éste explícitamente, y a partir de aquí, emparejando hamiltonianos, construimos el espectro discreto correspondiente a cualquiera de los espacios simétricos.

Entrelazada con esta exposición, vemos el efecto de una operación susy tanto en la matriz S —en su forma asintótica, y en sus polos— como en la forma analítica de las interacciones. En especial notamos la existencia de potenciales cuya forma es invariante bajo SUSY. Así, una transformación de supersimetría permite formar cadenas de potenciales, diferenciando sólo en la constante de acoplo, que diferirán en un conjunto finito de estados ligados. O, en el caso de la interacción puntual $V = \lambda\delta(x)$, susy se limitará a cambiar el signo de la constante λ .

En este análisis detallamos muy particularmente potenciales que pueden obtenerse con cadenas susy partiendo del libre. En este caso hay que prestar cierta atención a los dominios de definición del operador de supercarga Q , ya que si bien distintas cadenas resultan partir de la forma analítica del hamiltoniano libre, no todas corresponden al mismo dominio de definición, y por ello no tienen por que tener el mismo espectro continuo.

.4 La noción de cambio de escala y sus efectos

En los espacios anteriores la escala física de la interacción, aquella marcando la unidad física a la que están referidas longitudes, momentos y ctes. de acoplo, no resulta necesaria y ha sido ignorada en el desarrollo. Esta es una propiedad usual del método algebraico: permite esconder debajo de la alfombra cualquier consideración métrica. Y es también una debilidad: las escaleras que hemos construido, por ejemplo, no reflejan la sutileza del comportamiento del espectro ante una variación continua del acoplo.

La alteración de la escala de interacción es un cambio dependiente de todos los acoplos (y en TCC, de las masas), y esperamos visualizar diversos efectos:

- El cambio cualitativo del espectro al pasar la cte. de acoplo por ciertos valores. Esto se refleja en cambios de estructura en todo el álgebra de observables, tan delicados que en teoría cuántica de campos todavía está pendiente el estudio exacto [15].
- La universalidad de comportamiento en regímenes donde parámetros concretos son despreciables, por ejemplo a momentos altos respecto a la intensidad de interacción, el scattering no distingue la forma del potencial. O, por poner otro ejemplo, la dependencia con el acoplo de un estado ligado presenta características universales cuando el primero va hacia valores altos.
- La aparición espontánea de escala en problemas que no parecían tenerla inicialmente [69]. Es el caso de interacciones con acoplo adimensional, y en general es el fenómeno de fijado de la interacción introduciendo valores físicos a energías concretas, como se hace tradicionalmente en estudios de grupo de renormalización.

Todos estos fenómenos son conocidos y estudiados en teoría cuántica de campos, pero con la complicación y dificultades que es de esperar en una configuración de infinitos grados de libertad.

En mecánica cuántica es más fácil atrapar el significado físico cualitativo de cada cambio de estructura. Podemos dibujar como un estado virtual va moviéndose a ser un estado físico real, y que ocurre con los valores de la energía. Podemos ver exactamente como la prescripción de algún valor de la interacción fija la constante de acoplo, o la relación entre éstas y la escala de medida en el espacio de configuración. Los restantes capítulos de la tesis los dedicamos a construir sobre estos conceptos.

.5 Trayectorias y polología

En el capítulo tres estudiamos numéricamente como los resultados del scattering dependen de las constantes de acoplamiento de los potenciales, especialmente las propiedades analíticas. Describimos en particular como las singularidades de la matriz S se mueven, coalescen o desaparecen para una constante de acoplo variable.

Para los niveles de energía de los estados ligados, mostramos cálculos perturbativos de la variación, al escalar la constante de acoplo, incidiendo en el comportamiento a altos momentos. Vemos como estas estimaciones coinciden con el cálculo numérico, y que podemos dividirlos en distintas clases de universalidad según las singularidades que presente el potencial de partida. Dado que mostraremos bastantes casos de potenciales pares, complementamos el estudio asintótico con cálculos de los defasajes par e impar correspondientes a este caso.

Se obtiene más información si observamos la matriz S al completo, con toda su estructura de singularidades moviéndose al variar el acoplo en el potencial. Para visualizarla, calculamos el movimiento de los polos de la matriz S para potenciales de soporte compacto y de soporte en puntos. Los potenciales de soporte en pocos puntos tienen una estructura de polos muy controlable, siendo en especial notable el cambio de una a dos deltas, y en menor grado el siguiente. Con ello vemos aparecer por separado diferentes propiedades, tales como el posicionamiento asintótico de los polos para constantes de acoplo grandes, su desplazamiento cuando la constante de acoplo cambia de signo, la existencia de puntos casi universales de *touchdown*, donde los pares de polos colapsan sobre el eje imaginario, etc.

.6 Interacciones de contacto

Nos concentramos en el capítulo cuatro en potenciales tipo δ, δ' , etc. y sus peculiaridades. Estudiamos las interacciones más generales con soporte puntual y sus posibles regularizaciones.

Los hamiltonianos con soporte puntual se clasifican exhaustivamente calculando las extensiones autoadjuntas del operador libre en $\mathbb{R} - \{0\}$, que corresponden a diversas imposiciones de condiciones de contorno en el origen. Esta construcción fue ejemplificada por Albeverio, Holden *et al* [4] y por Seba [65]. En este sentido completamos esfuerzos (Kurasov [43], Carreau [16], Seba) realizados recientemente para dar sentido físico a todas las extensiones obtenidas. Presentamos, además del operativo tradicional [63], un cálculo realizado por conservación de corrientes de probabilidad, y añadimos alguna otra posibilidad, como es el trabajar con ecuaciones

integrales, donde tiene sentido operar con distribuciones.

Expondremos las obstrucciones a la regularización de estos problemas y sus posibles soluciones. Dedicamos especial atención a la modificación del cálculo usual de distribuciones cuando trabajamos con funciones test admitiendo discontinuidades, una sugerencia que puede desarrollarse sencillamente en casos regularizables, y que Kurasov ha extendido hasta cubrir todas las condiciones de contorno posibles.

En la literatura se presenta además un problema debido a la etiquetación precipitada, por parte de Holden *et al.*, de una extensión determinada como correspondiente al potencial $V = \delta'(x)$, lo que generó un pequeño debate sobre su corrección y colateralmente sobre el uso de reguladores [79, 37, 6] en estos casos. De hecho, este potencial resulta bastante elusivo, debido a unas contundentes demostraciones de Seba sobre la imposibilidad de su regularización. Por ello, nuestros ejemplos abundan en las extensiones con él relacionadas. Encontramos que las propiedades clásicas de esta interacción coinciden más bien con condiciones de contorno definidas por Kurasov al realizar una teoría de distribuciones sobre espacios de funciones test discontinuas en cero. Así, a lo largo de estos capítulos etiquetaremos como δ' la interacción apuntada por Kurasov, y utilizaremos la notación $\delta^{(\prime)}$ como abreviatura para las condiciones de contorno de Albeverio-Holden:

$$\delta^{(\prime)} : \Psi(0^+) - \Psi(0^-) = \lambda\Psi'(0^+) = \lambda\Psi'(0^-) \quad (3)$$

El sentido físico de esta condición de contorno corresponde más bien a una interacción definida sobre dos semirrectas con una separación λ , como fue propuesto por Carreau al formular el problema en el contexto de integral de camino [17], y como nosotros volvemos a encontrar en un contexto diferente, al utilizar la medida de Lipzchitz para asociar una distancia métrica a cada interacción.

Como complemento, investigamos posibles formulaciones susy para generar los hamiltonianos buscados, aprovechando el que un operador cerrado A genera un operador autoadjunto A^+A , cuando esta composición se realiza haciendo coincidir dominio y rango,

$$D(A^+A) = \{\Psi | \Psi \in D(A) \wedge A\Psi \in D(A^+)\} \quad (4)$$

y encontramos también que los operadores A necesarios difieren del generador susy usual cuando introducimos las susodichas interacciones $\delta^{(\prime)}$. Podemos utilizar este operador de supercarga como un operador diferencial de primer orden, para la medida de distancias [21, s. 6], y es entonces cuando encontramos que corresponden a una distancia finita entre dos semirrectas (4.5).

.7 Grupo de Renormalización y potenciales de soporte puntual.

La ausencia de escala explícita en la descripción de los potenciales puntuales nos invita a intentar un tratamiento en el espíritu del grupo de renormalización. Así en el capítulo quinto se aplican las técnicas del desarrollo de Wilson-Kogut [77, 75, 76, 60] al scattering por potenciales de corto rango en la línea, estudiando la variación del mismo con un cambio de escala que se reflejará en el potencial. Se ve aquí que el GR encuentra una aplicación sencilla permitiendo reencontrar todas las matrices de scattering correspondientes a hamiltonianos puntuales y dar un esquema donde analizar las posibles regularizaciones.

Implementamos la transformación de renormalización, siguiendo las líneas sugeridas por [38], directamente en la matriz S :

$$T^\lambda S_k = S_{\lambda k} \quad (5)$$

Se apreciará la superioridad el problema 1D en la línea sobre el 3D simétrico $O(3)$. Al tener la matriz S_k cuatro entradas, obtenemos un rico conjunto de puntos fijos

$$\{S_k^{fp}\} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & e^{-i\theta} \cos \phi \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (6)$$

La localización de los puntos fijos y la identificación entre ellos de un círculo de interacciones con las mismas condiciones que las δ' del cálculo de Kurasov proporciona una salida al dilema de este potencial; la interacción $V = \lambda \delta'(x)$ es invariante de escala por motivos dimensionales, y la estructura del flujo de renormalización impide alcanzarla con una regularización basada en series potenciales L^1 .

El análisis de la estructura de flujo muestra que hay una equivalencia entre las interacciones localizadas al integrar éste en direcciones relevantes desde cada punto fijo, y las interacciones puntuales estudiadas en el capítulo anterior. Dicho de otra forma, nuestro espacio de interacciones renormalizadas (sección 5.2), S^∞ , coincide con las extensiones autoadjuntas del operador libre en $\mathbb{R} - \{0\}$ (sección 5.3).

Con ello, y realizando ejemplos concretos, vemos que para estudiar si una serie de interacciones de corto rango es válida o no como regularización de un potencial puntual dado, basta comprobar su movimiento bajo escalados en el espacio de interacciones de rango corto.

.8 Posibles desarrollos

Las principales aportaciones de nuestro trabajo se resumen en el capítulo de conclusiones. Adicionalmente, comentemos aquí algunos puntos sobre los que se podrá realizar más desarrollo en el futuro.

El trabajo sobre SUSY y geometría tiene más posibilidades. Existen otros análisis algebraicos en espacios homogéneos compactos G/K , por ejemplo [59, 5, 20], algunos de ellos implicando también construcciones susy en relación con curvaturas, por ejemplo, y sería interesante poner estas metodologías en relación con la nuestra. Tampoco se ha desarrollado aún una explicación de las relaciones entre la renormalización en mecánica cuántica y la factorización supersimétrica, lo que quizás podría desarrollarse a partir de la ubicuidad de nuestros ejemplos, que aparecen en ambos campos.

No hemos tenido tiempo material de extraer demasiadas conclusiones analíticas a partir de nuestros cálculos numéricos. Sería interesante tener algunos resultados exactos acerca de la localización de los puntos de *touch-down*, donde los pares de polos tocan el eje imaginario puro, ya que parece ser un comportamiento genérico pero no totalmente universal. En estos puntos se produce un cambio substancial en la estructura de S_k , quizás de la misma importancia que el que acontece en la aparición de un estado ligado.

Asimismo, habría que mirar con detalle aplicaciones que pudieren resultar de nuestras observaciones para simplificación de cálculos numéricos en física aplicada; por ejemplo en problemas donde hay que evaluar un retículo de pozos de potenciales sucesivos, e.g. [8].

Hemos eliminado las referencias correspondientes a la construcción de funciones de Green para cada interacción puntual, las cuales pueden devenir la herramienta de trabajo más versátil, como se ve en el ejemplo en que Seba [65] construye un pseudopotencial de Fermi correspondiendo a una determinada extensión, en las sugerencias de Carreau [17] para construir la integral de camino correspondiente, o en la propia composición del operador de primer orden que forma los factores susy.

En el estudio de regularizaciones, quedaría por ver el papel que juegan los potenciales propuestos por Atkosun y Newton [2] en su estudio de casos con no unicidad del problema inverso. Alguno de estos potenciales, por ejemplo, pueden construirse de forma susy a interacciones puntuales con esquemas parecidos a los nombrados en los capítulos dos y cuatro. Por tanto si puede definirse su flujo bajo renormalización, es de esperar que este relacionado con éstas. Si bien tenemos cierta intuición de que el fenómeno equivalente a la regularización por cte. de acoplo diferencial de la delta 2D sería la producción de una línea renormalizada partiendo de la dirección

relevante en cada δ' , no hemos construido aún el ejemplo explícito.

Capítulo 1

Scattering en una dimensión

Conceptos genéricos de teoría de dispersión. Scattering en la recta, a la Newton. Matriz S , propiedades elementales y comportamiento a altas y bajas energías. Casuística con simetrías discretas P,T; diagonalización del caso par y su relación con la teoría en tres dimensiones. Casuística para interacciones de corto y medio rango. Ecuaciones para inverse scattering: Métodos de Gel'fand-Levitan y de Marchenko. El «milagro». Cuestiones de unicidad.

1.1 Orientación general

La teoría de dispersión se incorpora en mecánica cuántica en la recta tomando como estados libres los correspondientes a soluciones del hamiltoniano sin interacción

$$H_{free} = \frac{-d^2}{dx^2}. \quad (1.1)$$

En principio la comparación se efectúa asintóticamente en el tiempo examinando los estados a $t \rightarrow \pm\infty$. Por tanto la teoría puede abarcar todos los hamiltonianos con condiciones de decrecimiento del potencial lo suficientemente rápidas para que sus soluciones coincidan asintóticamente con las ondas libres.

Técnicamente (ver por ejemplo [30] para detalles) lo que necesitamos es definir operadores de ondas (operadores de Möller)

$$\Omega^\pm = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{itH} e^{-itH_{free}} \quad (1.2)$$

que ligan Ψ_{in}, Ψ_{out} con $\Psi_{t=0}$; y con ello un operador de scattering

$$S = \Omega_-^\dagger \Omega_+ \quad (1.3)$$

que une estados in y out, $|\Psi_{out}\rangle = S|\Psi_{in}\rangle$. Este operador se anula entre estados de diferente energía y por ello puede escribirse “diagonalizado” en cajas S_k ¹,

$$S_k = \begin{pmatrix} T_k^l & R_k^r \\ R_k^l & T_k^r \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Debido a sus propiedades analíticas, S_k se maneja normalmente como una función de k , y se suele denominar «matriz S» tanto a esta función como al operador que describe. Los coeficientes en la matriz son los llamados coeficientes de transmisión y reflexión, desde la derecha y desde la izquierda.

Sabido es que en el caso de la ecuación de Schrödinger uno puede reducir el análisis de la ecuación temporal a la ecuación estacionaria. En este formato es posible -y bastante intuitivo- derivar la matriz S con un análisis asintótico. Consideremos el movimiento de una partícula en un potencial de corto alcance (más adelante fijaremos condiciones precisas). La partícula puede incidir de izquierda a derecha (scattering normal, desde la izquierda) o de derecha a izquierda (scattering desde la derecha). En el primer caso la onda entrante es e^{+ikx} , y la onda total tendrá la forma asintótica

$$\Psi(x) \approx \begin{cases} e^{ikx} + b(k)e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ t(k)e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (1.5)$$

¹Las operaciones con k continuo se entienden en el sentido de kernels de integración

donde $b(k)$ es la amplitud de reflexión y $t(k)$ la amplitud transmitida. Se definen

$$\sigma_r = |b(k)|^2, \sigma_t = |t(k) - 1|^2 \quad (1.6)$$

como los coeficientes de scattering reflejado y transmitido. Si la partícula incide desde la derecha, con e^{-ikx} , tenemos igualmente

$$\Psi(x) \approx \begin{cases} t_+(k)e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ b_+(k)e^{ikx} + e^{-ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (1.7)$$

La matriz formada por estos coeficientes de scattering, $\begin{pmatrix} t & b_+ \\ b & t_+ \end{pmatrix}$, es idéntica a la matriz $S(k)$ funcional que hemos descrito (salvo detalles, ver sección 1.2.4, y [54])

1.2 Formulación de Deift-Newton

Como ya remarcamos en la introducción, los problemas directos que se plantean en la recta suelen ser sencillos y por ello las herramientas clásicas no son demasiado sofisticadas estructuralmente. Cuando se atacó el problema de Scattering Inverso, Fadeev [26] extendió la teoría con una tecnología práctica, pero con una estructura no plenamente coincidente con el caso 3D.

El planteo correcto del problema de dispersión nos exige, también en una dimensión, la construcción de una comparación entre soluciones de interacción y soluciones libres, y por tanto la aparición también aquí de soluciones de Jost. Una construcción cuidadosa ha de permitir aprovechar estas soluciones para definir una función de Jost, es este caso obviamente una matriz 2x2, que automáticamente nos da la matriz S .

La formulación de Newton [51, 54], desarrollada en los ochenta a partir del análisis de Deift-Trubowitz [25, 24], corrige la original de Fadeev sigue estas líneas de forma tan cercana al caso 3D que en muchas ocasiones puede reducirse a éste. La formulación del problema inverso resulta más clara en este *setup*, y facilita tanto el análisis como el trabajo de clasificación de potenciales y matrices.

1.2.1 Soluciones especiales de la ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger en la línea,

$$-y'' + Vy = k^2y, \quad (1.8)$$

puede resolverse con diversas condiciones de contorno. Se definen en la literatura (seguimos aquí la exposición de Newton [51]), los siguientes pares de soluciones:

- Las soluciones de Jost, $\chi_k \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$; coinciden asintóticamente² con las ondas libres desde derecha e izquierda

$$f_1(x \rightarrow +\infty) = e^{ikx}, f_2(x \rightarrow -\infty) = e^{-ikx} \quad (1.9)$$

Es bien sabido que el nucleo de Green es aquí

$$G_k^J(x, y) = -\frac{1}{k} \sin k(x - y) \quad (1.10)$$

y por tanto las ecuaciones integrales correspondientes son:

$$f_1 = e^{ikx} - \frac{1}{k} \int_x^\infty dy \sin k(x - y) V(y) f_1(y) \quad (1.11)$$

$$f_2 = e^{-ikx} - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x dy \sin k(x - y) V(y) f_2(y) \quad (1.12)$$

- Las soluciones físicas, correspondientes a las condiciones 1.5 y 1.7 arriba mencionadas, conteniendo la descripción en ondas incidente, reflejada y transmitida.

Poniendo $\psi_k \equiv \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$, podemos agrupar las dos soluciones en una ecuación de Lippmann-Schwinger matricial.

$$\psi_k(x) = e^{i\hat{I}kx} \hat{1} - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{ik|x-y|} V(y) \psi_k(y) \quad (1.13)$$

(con $\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\hat{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$), correspondiendo al núcleo de Green

$$G_k^+(x; y) = \frac{1}{2ik} e^{ik|x-y|} \quad (1.14)$$

- La solución regular, $\varphi_k \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$, se define por condiciones de contorno en puntos ordinarios de la ecuación, e.g. en $x = 0$:

$$\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi'(0) = \begin{pmatrix} ik \\ -ik \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

²A partir de aquí consideramos la comparación asintótica en el espacio, como ya se ha comentado.

obteniéndose entonces la ecuación integral

$$\varphi(k, x) = e^{iIkx} \hat{1} - \frac{1}{k} \int_0^x dy \sin k(x-y) V(y) \varphi_k(y) \quad (1.16)$$

Al estar fijada en un punto dado, y no como límite, la solución regular se presta mejor al estudio analítico, ver [18], y se utiliza como pivote en la conexión de estados de entrada y salida.

Ahora nuestro objetivo es conectar los estados libres de *in* y *out* con las soluciones del hamiltoniano. Estos están reflejados en la solución real. Pero el cálculo es más sencillo en la solución de Jost, que “olvida” los coeficientes de transmisión. Y ambas dependen de condiciones asintóticas, siendo la solución regular la que se refiere a un punto dado y nos permite realizar el empalme.

Para ejecutar éste, definimos la matriz de Jost, J_k , como la matriz que acopla las soluciones regular y real,

$$\varphi_k(x) = \psi_k(x) J_k \quad (1.17)$$

La definición es similar a la de función de Jost en potenciales con simetría esférica, y puede reducirse a ésta, como veremos más adelante, en casos particulares. En el cálculo de la matriz de Jost es útil apoyarse en otra relacionando la solución regular y la de Jost:

$$\varphi_k(x) = \chi_k(x) F_k \quad (1.18)$$

Con ésta, y observando que la solución real difiere de la de Jost a través de los coeficientes de transmisión

$$\psi_k = \begin{pmatrix} T_k^l & 0 \\ 0 & T_k^r \end{pmatrix} \chi_k \quad (1.19)$$

es posible despejar J_k en términos de Wronskianos entre soluciones de Jost, entre soluciones regulares, y entre ambas. (remitimos al lector por ejemplo a [30] o a [51], y a la sección 1.3.1)

La utilidad de la matriz de Jost es la siguiente: definimos la matriz S a la manera habitual, como aquella que conecta estados de entrada y salida; en esta formulación las soluciones físicas estacionarias conjugadas ψ^+ , ψ^- (donde $\psi^+ = \psi$, $\psi^- = \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ \psi_1^* \end{pmatrix}$) están conectadas con

$$\psi_k^+(x) = \psi_k^-(x) S_k \quad (1.20)$$

Ahora, observamos que las soluciones regulares y sus conjugadas pueden conectarse simplemente usando una matriz antidiagonal $q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\varphi_k = \varphi_{-k}q \quad (1.21)$$

y que también podemos expresar 1.20 como

$$\psi_k = \psi_{-k}qS_k \quad (1.22)$$

En consecuencia, para despejar S nos basta con utilizar 1.17 con una de estas dos expresiones y comparar con la otra. Tenemos entonces

$$\psi_{-k} = \varphi_{-k}J_{-k}^{-1} = \varphi_kqJ_{-k}^{-1} = \quad (1.23)$$

$$= \psi_kJ_kqJ_{-k}^{-1} \quad (1.24)$$

y vemos rápidamente que la matriz S corresponde a

$$S_k = qJ_{-k}qJ_k^{-1} \quad (1.25)$$

lo que no es sino la descomposición habitual en “cociente” de funciones, ahora matrices, de Jost.

1.2.2 Propiedades elementales de S

De cara a problemas que parten de la matriz S , como es por ejemplo el problema inverso, o el esquema de renormalización que utilizaremos en el capítulo quinto, cualquier delimitación que se pueda hacer al conjunto de operadores admisibles será de utilidad.

Las propiedades de las soluciones de la ecuación de Schrödinger ya restringen S_k notablemente. Ante todo observamos tres rasgos

Unitariedad

El operador de scattering es unitario, con

$$S_kS_k^\dagger = S_k^\dagger S_k = 1 \quad (1.26)$$

Esta es la propiedad más estudiada, y viene dada por la conservación de probabilidad. La construcción de S 1.3,1.2 nos une esta condición a la de tener un hamiltoniano autoadjunto. Así, veremos en los capítulos 4-5 como una condición pareja a la construcción de extensiones autoadjuntas es exigir que la matriz S correspondiente sea unitaria.

Reflexión

Cuando el potencial es real y local, $V(x)$, las ecuaciones de Lippman-Schwinger implican una correspondencia $\psi_{-k} = \psi_k^*$ entre las soluciones conjugadas (para k real) Esto se se refleja en una simetría

$$S(-k) = S^*(k) \quad (1.27)$$

Como consecuencia de ello, tenemos el principio de reflexión en el eje imaginario para los polos de $S(k)$, que nos dice que el mapa de polos sera simétrico respecto a dicho eje. Esta propiedad la veremos numericamente en el capítulo 3.

Algunas veces, en la formulación radial, se entiende este hecho a la inversa: considerar S_k definido sólo para $k \geq 0$, donde tiene sentido físico, e imponer una extensión analítica válida en todo \mathbb{R} por medio de esta propiedad.

En el caso más general de potenciales, no se da 1.27, pero sí existe otra reflexión que se cumple, si ejecutamos un intercambio de terminos diagonales:

$$S_{-k}^\dagger = qS_k q \quad (1.28)$$

lo que sigue simplemente de la definición funcional de S [51].

Reciprocidad

La inversión temporal intercambia estados *in* por *out* y el signo del momento \vec{k} . Se ve inmediatamente que esto intercambia

$$\begin{aligned} T^r &\leftrightarrow T^l \\ R^r &\leftrightarrow R^l \\ R^l &\leftrightarrow R^r \end{aligned} \quad (1.29)$$

Por tanto, si hay simetría bajo T los coeficientes de transmisión son iguales. Esta simetría es bastante genérica en los problemas que tratamos: Si el potencial es local, su hermiticidad implica realidad,

$$V(x)^\dagger = V(x) \Rightarrow V(x) = V^*(x) \quad (1.30)$$

y por tanto $H = T + V$ es invariante bajo inversión temporal.

En este caso, tanto 1.27 como 1.28 son válidas, y su combinación se formula como el teorema de reciprocidad³ de S_k :

$$S_k^T = qS_k q \quad (1.31)$$

Por ello es una restricción aplicable generalmente; de hecho el problema de scattering inverso se suele plantar solamente para sistemas con esta condición.

³también llamado de *microcausalidad* [30]

1.2.3 Comportamientos asintóticos

Una condición suficiente para la resolución del problema inverso es la “analiticidad hacia delante”; $S(k)$ analítica y con cierta libertad asintótica, $S(k \rightarrow \infty) \rightarrow I$. Esta condición está garantizada para amplias familias de potenciales; en particular, cuando

$$\int dx(1+x^2)|V(x)|dx < +\infty \quad (1.32)$$

o en general para cualquier potencial recobrado mediante Deift-Fadeev-Trubowitz. Newton [54] parece sugerir que esto va a ser cierto para cualquier S construida asintóticamente – es decir, a partir de las autofunciones del hamiltoniano –, pero las condiciones no son totalmente generales. En el capítulo 4 construimos matrices S para ciertas interacciones puntuales violando esta propiedad.

Otro aspecto que se revela importante en muchos problemas es el comportamiento a baja energía de S . Esto es, $\lim_{k \rightarrow 0} S_k$ y la aproximación $S(k \sim 0)$ en torno a éste.

Cuando $|x|V(x) \in L^1$ puede probarse la alternativa [54]

$$S(0) = -q \quad \text{ó} \quad T(0) \neq 0 \quad (1.33)$$

y además para $k \sim 0$ el primer caso (que, por cierto, es equivalente a la ausencia de *umbrales*, autoestados discretos de $E=0$) nos da un comportamiento lineal en $T(k)$,

$$T(k) = -2ik/\gamma + o(k) \quad (1.34)$$

Atkosun y Newton [2, 1, 56] nos dan varios ejemplos del “pánico” que se produce en el comportamiento asintótico cuando $V \notin L^1_1$, por ejemplo [56] el potencial

$$V(x) = (\rho^2 - \frac{1}{4})H(x)\frac{1}{(1+x)^2} + (\sigma^2 - \frac{1}{4})H(-x)\frac{1}{(1-x)^2} \quad (1.35)$$

nos da un comportamiento en transmisión

$$T(k) \sim k^{\sigma+\rho} \quad (1.36)$$

para $k \sim 0$

La diferencia entre los comportamientos a baja y alta energía se relaciona con el invariante correspondiente al número de estados ligados de un potencial. De hecho el correspondiente teorema de Levinson debe adaptarse a cada uno de los casos mencionados, ver [56] en estas situaciones donde las condiciones asintóticas no son las habituales.

1.2.4 S funcional versus S analítica.

Hemos visto dos formas de construir la matriz S : como una matriz «funcional» conectando soluciones de entrada con soluciones de salida (ecuación 1.20); o como una tétrada de funciones describiendo el comportamiento asintótico de unas soluciones de la ecuación de Schrödinger, ecuaciones 1.7,1.5.

El segundo método fija la normalización en infinito de las soluciones, y es por ello ligeramente más restrictivo que el primero. Así, Newton [54] remarca que es posible dar matrices S funcionales que difieran de las asintóticas correspondientes al mismo potencial, siendo la diferencia un factor de módulo unidad:

$$S_k^{asint} = \frac{g^*(k)}{g(k)} S_k^{func} \quad (1.37)$$

Naturalmente, las autofunciones sobre las que transforma S^{func} difieren en un factor $g(k)$ de las normalizadas como solución real.

Debemos notar que ambas matrices S son totalmente válidas, ya que la propiedad de *analiticidad hacia delante*, esto es la condición de ser $T_k^{r,l}$ meromorfa en \mathbb{C}^+ y con $T_k^{r,l}(|k| \rightarrow \infty) = 1$, no es una condición necesaria, en una dimensión, para una de una matriz S_k proveniente de una solución a la ecuación de Schrödinger — al menos, no desde el punto de vista del problema inverso.

1.3 Casuística

1.3.1 Simetría T

Ya hemos dicho que cuando el sistema tiene simetría bajo inversión temporal, los coeficientes de transmisión T^r, T^l son iguales, y éste era el caso cuando el hamiltoniano se compone simplemente de un término cinético mas un potencial local (suficientemente decreciente por supuesto). Aparece entonces el teorema de reciprocidad 1.31

El cálculo de la matriz de Jost es ahora bastante sencillo, ya que la igualdad de las transmisiones permite ponerla como

$$J_k = \frac{1}{T_k} F_k \quad (1.38)$$

y de ello es posible deducir [51] que basta con evaluar un wronskiano, en concreto

$$J_k = \frac{1}{2ik} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Wr(\chi_k^T, \varphi_k) \quad (1.39)$$

1.3.2 Simetría P

Si la matriz S es simétrica, es factible diagonalizarla y analizar por separado los dos sectores que se obtienen (onda par y onda impar).

Los autovalores de S_k se suelen expresar en forma exponencial, esto es,

$$S_k = \begin{pmatrix} e^{i\delta_-(k)} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_+(k)} \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Las funciones $\delta_-(k)$, $\delta_+(k)$ reciben el nombre de *defasajes* en onda impar o par, respectivamente.

Todo el análisis puede realizarse descomponiendo en los subespacios par e impar, de manera similar a la descomposición en armónicos esféricos cuando hay simetría de rotación en 3D. En este sentido el operador paridad cumple el mismo papel que el de rotaciones en dimensiones más altas.

De hecho, las soluciones que obtengamos en la onda impar son idénticas a las que se obtienen para la onda s del problema radial. Los ejemplos del siguiente punto visualizan esta conexión.

1.3.3 Simetrías P, T

Tomemos ahora un sistema con simetría T y veamos con más detalle que ocurre si tenemos adicionalmente simetría bajo paridad, la matriz S correspondiente presentando por tanto iguales coeficientes de reflexión derecho e izquierdo.

De hecho, podemos escoger una base en la que tanto la matriz S como la de Jost (y la q) son diagonales, y el problema conecta con el habitual tridimensional en ondas parciales. Hagámoslo explícitamente:

Si $V(x) = V(-x)$ las soluciones de Jost cumplen $f_1(x) = f_2(-x)$ luego podemos poner el vector solución como

$$\xi_k \equiv (f_k(x), f_k(-x)), \quad f_k \equiv f_1 \quad (1.41)$$

La matriz S es simétrica

$$S_k = \begin{pmatrix} T_k & R_k \\ R_k & T_k \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

en la “pseudobase” de ondas libres

$$\{e^{ikt} \mid k \in \mathbb{R}\} \quad (1.43)$$

y por tanto las combinaciones impar y par de las ondas libres diagonalizarán la matriz S (con autovalores $T \pm R$) y la matriz de Jost.

En esta nueva base las condiciones asintóticas pasan a ser las combinaciones par e impar de (e^{ikx}, e^{-ikx}) , las asintóticas de la antigua; esto es,

$$(i \sin kx, \cos kx), \quad (1.44)$$

las conocidas condiciones de onda par e impar.

Las condiciones de contorno de la solución regular sufren la misma re-combinación y pasan a ser

$$g_{impar}(0) = 0 \quad g'_{impar}(0) = ik \quad (1.45)$$

$$g_{par}(0) = 1 \quad g'_{par}(0) = 0 \quad (1.46)$$

Donde vemos claramente como la solución regular impar coincide (salvo constantes en todo caso) con la utilizada en el caso tridimensional, onda s .

Finalmente, la solución de Jost pasa a expresarse sencillamente como

$$\xi = (f(x) - f(-x), f(x) + f(-x)) \quad (1.47)$$

con lo que resulta innecesario dar una nueva expresión integral, ya que suele ser más rápido resolver simplemente la asociada a $f(x) \equiv f_1(x)$

La matriz de Jost asociada, si recalculamos el Wronskiano entre las soluciones regular y las de Jost, resulta ser

$$J_k = \frac{P}{2ik} W\{\chi, \varphi\} \Big|_{x \downarrow 0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_k(x) + f_k(-x) & \\ & -\frac{1}{ik}(f'_k(-x) + f'_k(x)) \end{pmatrix} \Big|_{x \downarrow 0} \quad (1.48)$$

Obviamente también se diagonaliza la matriz q , originariamente anti-diagonal, con lo que 1.25 se reduce a una igualdad

$$S_k = J_{-k} J_k^{-1} \quad (1.49)$$

con matrices diagonales, y tiene sentido hablar de una parte impar y de una parte par de S y J : Los elementos diagonales de J son llamados [30] funciones de Jost par e impar; si no hay discontinuidades se reducen a

$$J^{impar} = f_k(0) \quad (1.50)$$

$$J^{par} = -\frac{1}{ik} f'_k(0) \quad (1.51)$$

Con ello cumplimos nuestra promesa de hacer aparecer, concretamente en 1.50, las funciones y soluciones de Jost de la onda s en 3D.

Ejemplo para el potencial delta

Para $V(x) = g\delta(x)$ la ecuación integral de la solución de Jost es inmediata:

$$f(x) = \begin{cases} x > 0, & e^{ikx} \\ x < 0, & e^{ikx} - \frac{g}{k} \sin kx f(0) \end{cases} \quad (1.52)$$

Aplicamos sobre ella la definición de las funciones de jost y obtenemos:

$$J_k^{par} = \lim_{x \searrow 0} -\frac{1}{2ik} (f'_k(x) + f'_k(-x)) = (-1 + \frac{g}{2ik}), \quad (1.53)$$

con el esperado cero en $k = -ig/2$, y

$$J_k^{impar} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) = 1 \quad (1.54)$$

significando que la onda impar no puede ver la delta en el origen.

Ejemplo de dos deltas

Para dar un ejemplo de problema directo donde el conocimiento de las soluciones de Jost es una solución más rápida que el *matching*, tomemos el propuesto en [30] de un potencial con dos deltas:

$$V(x) = g\delta(x - a) + g\delta(x + a) \quad (1.55)$$

Aquí nuevamente la ecuación integral de la solución de Jost es inmediata,

$$f_k(x) = \begin{cases} x > a & e^{ikx}; \\ a > x > -a & e^{ikx} - \frac{g}{k} \sin k(x - a) f_k(a); \\ -a > x & e^{ikx} - \frac{g}{k} \sin k(x - a) f_k(a) - \frac{g}{k} \sin k(x + a) f_k(-a) \end{cases} \quad (1.56)$$

y con ello directamente tenemos:

$$J_k^{impar} = f(0) = 1 + e^{ika} \frac{g \sin ka}{k} \quad (1.57)$$

$$J_k^{par} = -\frac{1}{ik} f'_k(0) = -(1 + ig e^{ika} \frac{\cos ka}{k}) \quad (1.58)$$

coincidiendo con el resultado en [30].

Ejemplo de corto alcance

Tomemos un ejemplo fuera de los potenciales de soporte compacto, el pozo exponencial

$$V(x) = -ge^{-|x|} \quad (1.59)$$

En tres dimensiones, este ejemplo fue utilizado por Jost [41] y Ma [46] para exponer problemas de aparición de polos espúreos en distintos cálculos de S_k (ver [50]).

En estos casos ya no es tan sencilla la resolución de la ecuación integral 1.11, pero se pueden aplicar métodos estandar para resolverla, por ejemplo aproximaciones sucesivas.

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_k^{(n)}(x); \quad f_k^{(0)}(x) = e^{-ik|x|} \quad (1.60)$$

$$f_k^{(n+1)}(x) = \frac{1}{k} \int_x^{\infty} \sin k(y-x)V(y)f_k^{(n)}(y)dy \quad (1.61)$$

Aquí es más rápido seguir a Jost, aplicando su mismo *ansatz*,

$$f_k(x) = e^{-ikx} \sum_{n=0}^{\infty} C_k^{(n)} e^{-nx}, \quad (1.62)$$

que sobre la ecuación de Schrödinger nos da la ecuación de recurrencia

$$C_k^{(n)} = \frac{-g}{n(2ik+n)} C_k^{(n-1)} \quad (1.63)$$

De donde se puede ver [41] que la solución es formulable en términos de funciones de Bessel B_k ; en concreto

$$f_k(x) = e^{-ik \log g} \Gamma(2ik+1) B_{2ik}(2g^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}) \quad (1.64)$$

Y como 1.59 es acotado y sin singularidades en el punto cero, podemos al igual que en el ejemplo anterior obtener directamente las dos funciones de Jost:

$$J_k^- = e^{-ik \log g} \Gamma(2ik+1) B_{2ik}(2g^{\frac{1}{2}}) \quad (1.65)$$

$$J_k^+ = e^{-ik \log g} \Gamma(2ik+1) \left(\frac{g^{\frac{1}{2}}}{ik} B_{2ik-1}(2g^{\frac{1}{2}}) - B_{2ik}(2g^{\frac{1}{2}}) \right) \quad (1.66)$$

Y de nuevo, naturalmente, la función de Jost impar coincide con la conocida para la onda s del caso tridimensional con simetría esférica.

1.3.4 Potenciales de soporte compacto

En el caso de potenciales con *rango finito* hay una manera simple de presentar la función the Jost. Tenemos:

1. *onda par*: $\Psi(x) \sim B_+ \cos(kx + \delta_+)$ y de aquí

$$e^{2i(\delta_+(k)+kb)} \equiv \frac{1 + i \tan(\delta_+ + kb)}{1 - i \tan(\delta_+ + kb)} \equiv \frac{1 - ih_+(k)/k}{1 + ih_+(k)/k}, \quad (1.67)$$

donde $h_+(k) = (\log \Psi)'(x = b)$ y b es el rango .

Por tanto

$$S^+(k) = e^{2i\delta_+(k)} = \frac{e^{-ikb}(1 - ih_+/k)}{e^{+ikb}(1 + ih_+/k)} \equiv \frac{J_{-k}^+}{J_k^+}, \quad (1.68)$$

y

$$J_{-k}^+ = e^{+ikb} \cos(kb) \left(1 + i \frac{h_+(k)}{k}\right), \quad (1.69)$$

El factor $\cos kb$ es introducido de manera que $J = 1$ el el caso de no interacción, $h_+ = -k \tan kb$. Los ceros en $kb = (2n + 1)\pi/2$ son espúreos, ya que se cancelan en $S^+(k)$.

Además, $h_+(k)$ es par en k , así que J_0^+ tiene un polo en $k = 0$ (excepto en casos críticos) lo que produce $S^+(0) = -1$, i.e. reflexión total.

2. *onda impar*: $\Psi(x) \sim B_- \sin(kx + \delta_-)$, y obtenemos de la misma manera

$$S^-(k) = e^{2i\delta_-(k)} = \frac{h_-(k)/k + i}{h_-(k)/k - i} \equiv \frac{J_{-k}^-}{J_k^-} \quad (1.70)$$

donde

$$J_k^- = e^{+ikb} \sin kb (h_-(k)/k + i) \quad (1.71)$$

En este caso, $S^-(0) = +1$.

Con las fórmulas (1.69) y (1.71) uno obtiene las expresiones previas para las funciones de Jost; por ejemplo, tomando el caso de una delta, $V(x) = g\delta(x)$, tenemos $h_+(k) = g/2, a = 0$, lo que produce $J^+(k) = 1 + ig/2k$ y $J^-(k) = 1$.

Por último, notemos que la posición concreta de la interacción es factorizable en la matriz S , de forma que un desplazamiento $V_\lambda(x) = V(x + \lambda)$ transforma la matriz de scattering con

$$S_k^t = e^{i\hat{I}k\lambda} S_k^0 e^{-i\hat{I}k\lambda} \quad (1.72)$$

(de hecho este resultado es válido con más generalidad)

1.3.5 Potenciales de corto alcance

Si la cola del potencial decrece más rápido que cualquier x^{-n} , entonces diremos que el potencial es de corto alcance.

Los resultados para este tipo de potenciales son bastante simples. Por ejemplo, cuando un potencial es yukawiano (suma de yukawas), se puede garantizar que $S(k)$ es analítica en todo el plano complejo.

Es un potencial con estas características de decrecimiento es válido el llamado desarrollo de alcance efectivo [9], que se efectúa sobre la matriz S descompuesta en onda par e impar. En concreto, la onda impar tiene un desarrollo

$$k \cot \delta_-(k) \approx -\frac{1}{a_-} + \frac{1}{2}r_-k^2 + O(k^4) \quad (1.73)$$

mientras que la par se desarrolla con la tangente

$$k \tan \delta_+(k) \approx -\frac{1}{a_+} + \frac{1}{2}r_+k^2 + O(k^4) \quad (1.74)$$

Potenciales de rango medio

Consideremos potenciales en las familias

$$L_\sigma^1(\mathbb{R}) = \left\{ V(x) \mid \int_{\mathbb{R}} dx |V(x)| (1 + |x|^\sigma) < \infty \right\} \quad (1.75)$$

A medida que la caída de la cola del potencial se hace más lenta, la situación se complica. Para $\sigma > 2$ todavía se salvan la mayoría de las propiedades básicas de unicidad, analiticidad, comportamiento a bajas energías etcétera, si bien sus zonas de validez se van reduciendo. En el caso crítico $\sigma = 1$, esto es, decaimiento cuadrático, la ruptura es evidente –ya hemos comentado algo en el potencial 1.35 – y comienza el reino de los potenciales de largo alcance. Entre $1 \leq \sigma \leq 2$ es posible estudiar [56] el cambio en las propiedades asintóticas.

Tales potenciales tienen el comportamiento usual a momentos altos (pues todos cumplen $V \in L^1$), pero su comportamiento con $k \sim 0$ depende de la clase σ a la que pertenecen. Específicamente [56],

Si $\gamma \equiv \int V f_{k=0}$ es cero (con f una sol. de Jost), entonces

$$1/T_k = o(|k|^{\sigma-2}) \quad (1.76)$$

para $1 \leq \sigma < 2$

(el caso $\sigma = 2$ conlleva $T(k) = O(1)$). Si $\gamma \neq 0$ entonces tenemos el comportamiento $T_k = -2ik/\gamma + o(k)$.

1.4 Inverse Scattering

Aunque no vamos a utilizarlas explícitamente, las ecuaciones de scattering inverso y sus excepciones están presentes como motivación en muchos de los ejemplos de esta memoria. Por ello, y a fin de tenerlos como referencia, vamos a resumir brevemente las principales técnicas.

La solución original de Fadeev ([26], y review en [18]) para el problema 1D no resulta plenamente satisfactoria. Aquí seguimos el formato de Newton [51, 54, 53, 55], más próximo a la teoría tridimensional, y que consigue formular tanto ecuaciones de Marchenko como de Gel'fand-Levitan.

1.4.1 Reducción del problema

Las ecuaciones de inversión se resuelven para sistemas sin estados ligados. El método para añadir y eliminar estados de un sistema se conoce perfectamente, y lo veremos aparecer también en el análisis por supersimetrías.

La eliminación de un estado de energía $-K^2$ equivale a eliminar su cero en la matriz de Jost, luego en la matriz S se refleja como

$$S_k^K = \frac{k + iK}{k - iK} S_k \quad (1.77)$$

y recíprocamente, por supuesto, para añadir un estado ligado. Este es el motivo por el que los potenciales transparentes tienen funciones de Jost polinómicas y matrices S racionales, vease por ejemplo [11].

1.4.2 Métodos de Gel'fand-Levitan

A partir de la matriz S reducida -sin estados ligados- se encuentra la matriz de Jost correspondiente utilizando la ecuación de Fredholm

$$L(\alpha) = K(\alpha) + \int_0^x d\beta K(\alpha + \beta) Q L(\beta) Q \quad (1.78)$$

donde L, K vienen dadas por

$$L(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk q (S_k - I) J_k q e^{ik\alpha} \quad (1.79)$$

$$K(\alpha) = \frac{1}{2\pi} q \int_{-\infty}^{\infty} dk q (S_k - I) e^{ik\alpha} q \quad (1.80)$$

Armados con la matriz de Jost, podemos reconstruir el potencial utilizando la ecuación de Gel'fand-Levitan

$$h(x, y) = h_0(x, y) - \int_{-x}^x dz h(x, z) h_0(z, y), \quad (1.81)$$

(válida para $|x| \geq |y|$).

La línea de trabajo con G-L es la siguiente: h_0 se obtiene de las funciones espectrales

$$\frac{d(\rho_E - \rho_E^0)}{dE} = \begin{cases} (1/4\pi k)(J_k^\dagger J_k)^{-1} - I] & \text{para } E > 0 \\ \sum_b M_b \delta(E - E_b) & \text{para } E < 0 \end{cases} \quad (1.82)$$

que constituyen su kernel, i.e:

$$h_0(x, y) = \int \Psi_E^0(x) d(\rho_E - \rho_E^0) \Psi_E^{0\dagger}(y) \quad (1.83)$$

y entonces h nos da directamente V a través de

$$V(x) = -2 \frac{d}{dx} h(x, x) \quad (1.84)$$

Ahora bien, debemos añadir los n estados ligados que habíamos eliminado previamente, y podemos escoger si hacerlo antes o después de resolver 1.81. En el primer caso, nos encontraremos con una familia n-paramétrica de potenciales construida a partir del reducido sin estados ligados. Si preferimos introducir los estados ligados en la matriz de Jost, podemos aplicar

$$J_k = I^n J_k^{red} \prod_n (\Gamma_{-k}^{(n)} \hat{I}) \quad (1.85)$$

haciendo corresponder a cada estado ligado K una Γ

$$\Gamma_k = 1 - B + B \frac{k + iK}{k - iK}, \text{ con } B = \tilde{r} r \hat{I} / r \hat{I} \tilde{r} \quad (1.86)$$

para obtener así una familia n-paramétrica de matrices de Jost a la que aplicaremos 1.81. Aquí r es un vector columna normalizado que cumple $J_{iK} \tilde{r} = 0$

1.4.3 Ecuación de Marchenko

Podemos obviar la construcción de la matriz de Jost utilizando un método de Marchenko. Naturalmente la elección dependerá de cada problema, ya que si bien aquí se nos permite formularlo en una sola ecuación integral, a cambio la ecuación un intervalo de integración infinito, a diferencia de la de G-L, que se extiende sólo en un rango finito.

Brevemente, el trabajo con Marchenko conlleva tres operaciones: Construimos, a partir de la matriz S reducida, una matriz transformada

$$g(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk (S_k - I) e^{ik\alpha} \quad (1.87)$$

con ella planteamos la ecuación de Marchenko

$$\zeta_x(\alpha) = g_x(\alpha) + \int_0^\infty d\beta g_x(\alpha + \beta) q \zeta_x(\beta) q, \quad (1.88)$$

resolvemos, y despejamos el potencial con la relación

$$V(x)\hat{1} = -2\hat{I}\frac{d}{dx}\zeta_x(0^+)\hat{1} \quad (1.89)$$

El milagro

La ecuación 1.89 vista aisladamente iguala dos componentes de un vector, casi sorprendentemente. Por ello fue denominada “el milagro” por Newton.

La solubilidad de un problema inverso dependerá de si se consigue o no el milagro. Ahora bien, una condición suficiente para ello es la integrabilidad absoluta de $kR_k^{l,r}$. Por ello en una dimensión pueden resolverse problemas inversos con matrices que no cumplan analiticidad *forward*.

Otro punto curioso que emerge de esta ecuación es que en realidad estamos resolviendo a la vez dos problemas de scattering con idénticos coeficientes de transmisión pero con coeficientes de reflexión cambiados de signo. El potencial $\lambda_1 + \lambda_2$ corresponde a la matriz S que hemos entrado en 1.87, y la matriz S con coeficientes de reflexión opuestos tendrá un potencial $\lambda_1 - \lambda_2$. Si el potencial es par, ambas matrices S están por tanto relacionadas por un intercambio de sus desfases par e impar. (más sobre esto en el punto siguiente)

1.4.4 Unicidad del problema inverso

Es sabido [24, 26] que el problema inverso tiene una solución única para potenciales cumpliendo $(|x| + |x|^2)V \in L^1(\mathbb{R})$. Pero si $|x|V \notin L^1$ se conocen ejemplos de familias completas de potenciales dando el mismo scattering. Además, como ya hemos comentado en 1.3.5, las propiedades asintóticas de la matriz S_k presentan algunas variaciones.

El estudio de estas ambigüedades está a un nivel prácticamente empírico. Newton y Atkosun [2, 3, 1] nos presentan varios ejemplos con distintos comportamientos asintóticos, y una recopilación incluyendo posibles extensiones a la teoría es esbozada por Sabatier y Degasperis [23], quienes además hacen un interesante esfuerzo por incorporar ecuaciones *con impedancia*, en particular

$$(A^{-1}\frac{d}{dx}A\frac{d}{dx} + k^2)\Psi(x) = 0 \quad (1.90)$$

El ejemplo “prototípico” de familia de potenciales ambiguos es:

$$V_a(x) = -2\delta(x) + \frac{8H(x)}{(1+a+2x)^2} + \frac{8H(-x)}{(1+a^{-1}-2x)^2} \quad (1.91)$$

que viene a ser la adición de una delta al caso 1.35

La existencia de interacción delta no es necesaria en otros ejemplos [1], pero aquí colabora para obtener una matriz S extremadamente sencilla

$$S = \frac{1}{i+k} \begin{pmatrix} k & i \\ i & k \end{pmatrix} \quad (1.92)$$

Notemos que en cambio el potencial correspondiente a cambiar de signo las reflexiones es único, y es simplemente $V = 2\delta(x)$.

Es interesante observar que 1.72 implica que el mismo resultado podríamos conseguir con un potencial dependiente de la velocidad

$$V(x, k) = 2\delta\left(x + \frac{\pi}{2k}\right). \quad (1.93)$$

En cuanto a la recíproca, el ver si un mismo potencial puede corresponder a varias matrices S , limitémonos a remarcar [54] el comentario del párrafo 1.2.4, donde notamos que esto puede ocurrir si no fijamos la normalización de las soluciones, pero que entonces encontraríamos que la construcción asintótica de S difiere de la matriz de partida.

Capítulo 2

Supersimetría y scattering en espacios homogéneos

Teoría de scattering geométrico de Wehrhahn; aplicación al análisis de espacios simétricos de rango uno. Técnicas de supersimetría en mecánica cuántica. Ejemplo de la delta. Efecto de Susy sobre la matriz S y los desfases. Ejemplo de los potenciales invariantes de fase. Construcción de escaleras susy para calcular espectros. Aplicación a los espacios simétricos de rango uno vía teoría de Werhahn; casos compactos, euclídeos y no compactos. Construcción del espectro del caso compacto.

En esto fueron razonando los
dos, hasta que llegaron a un
pueblo donde fue ventura hallar
un algebrista

M. Cervantes, *El ingenioso hidalgo
Don Quijote de la Mancha*

2.1 Scattering geométrico.

2.1.1 Comparación de geometrías.

Werhahn[71, 74] propuso utilizar la formulación general de la teoría de scattering para analizar los espacios simétricos riemannianos, aprovechando que se pueden construir como un espacio homogéneo $X = G/K$ (tomando G un grupo de Lie simple y K un subgrupo compacto)

La idea pasa por recordar el concepto de simetría como una restricción al movimiento. Interpretamos las estructuras diferenciales como movimientos cuánticos, y comparamos asintóticamente el movimiento cuántico en el espacio simétrico $X = G/K$ con el correspondiente a un espacio con alguna simetría eliminada (contraída), por ejemplo con su espacio tangencial. Con esta comparación podemos bien construir directamente, como operador diferencial, el hamiltoniano correspondiente a este movimiento [73], o bien utilizar la teoría general de scattering para construir una matriz S que refleje la diferencia de simetrías entre ambos espacios.

En la práctica, estudiamos el comportamiento asintótico de las autofunciones comunes de un álgebra de operadores diferenciales invariante bajo un grupo de transformaciones, comparándolas con el comportamiento de una de las autofunciones de operadores diferenciales invariantes bajo una simetría más trivial, diríamos un grupo más “plano”.

En [72] se prueba la consistencia del esquema, utilizando scattering inverso para reconstruir un potencial a partir de la matriz S , y viendo que éste coincide con el hamiltoniano construido directamente.

La construcción de este hamiltoniano se ejecuta haciendo descender el laplaciano del espacio subyacente al simétrico [74]. En cierta manera el método es una extensión de las técnicas de funciones esféricas generalizadas. El procedimiento es aplicable incluso en casos donde no hay scattering, como por ejemplo espacios compactos, donde podemos obtener al menos el espectro discreto.

2.1.2 Espacios simétricos de rango uno

En esta exposición nos restringimos a los espacios de rango uno, que pueden ser coordinados con algunos ángulos y una variable radial. Así el problema es cercano al de scattering en la semirrecta; de hecho podemos tomar el caso isótropo con los términos angulares no contribuyendo.

Comencemos con el caso **no compacto**.

Utilizamos la forma de Killing-Cartan en G , que desciende al cociente

G/K [39] dando el laplaciano

$$\Delta_r = \frac{d^2}{dr^2} + m_\alpha \coth r \frac{d}{dr} + 2m_{2\alpha} \coth 2r \frac{d}{dr} + \Omega \quad (2.1)$$

donde Ω depende solo de las variables angulares, y los enteros $m_\alpha, m_{2\alpha}$ se relacionan con la multiplicidad de las raíces de G/K [14, 74]. En la tabla 2.1 vemos el valor que toman estos parametros para las diferentes subfamilias no compactas.

Ahora el término en derivada primera puede ser eliminado con una sustitución en la ecuación espectral $\Delta_r \Psi(r) = \lambda \Psi(r)$. En concreto, si el término en cuestión es de la forma $f(r) \frac{d}{dr}$, basta con tomar $F(r) = \exp(-\int \frac{f(x)}{2} dx)$ y sustituir $\Psi = F\Phi$. Con ello el nuevo hamiltoniano actua en Φ como

$$H(\Phi) = -\Delta_r \Phi = \left(-\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{f(r)}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{df(r)}{dr} \right) \Phi(r) \quad (2.2)$$

ya sin término en velocidades.

En el caso isotrópico $\Omega = 0$ nuestra ecuación 2.1 es por tanto equivalente a un movimiento uni-dimensional bajo un potencial de la familia

$$V(r) = \frac{a}{\sinh^2 r} + \frac{b}{\sinh^2 2r} \quad (2.3)$$

con una variable radial, $r > 0$, (con lo que el análisis se corresponde con el de la onda impar de un potencial simétrico en dimensión uno). Evaluando explícitamente 2.2 obtenemos para a y b :

$$a = \left(\frac{m_\alpha + m_{2\alpha} - 1}{2} \right)^2 - \left(\frac{m_{2\alpha} - 1}{2} \right)^2, \quad b = (m_{2\alpha} - 1)^2 - 1 \quad (2.4)$$

Tabla 2.1: Coeficientes en los potenciales de *symmetry scattering* para espacios simétricos no compactos de rango uno

K es el subgrupo compacto maximal correspondiente

Espacio	K	m_α	$m_{2\alpha}$
$SO(n, 1)/K$ loquesea	$SO(n)$	$n - 1$	0
$SU(n, 1)/K$	$SU(n) \otimes U(1)$	$2n - 2$	1
$Sp(n, 1)/K$	$Sp(n) \otimes Sp(1)$	$4n - 4$	3
F_4/K	$SO(9)$	8	7

Space		K	m_α	$m_{2\alpha}$
$O(2n+1, 1)/K$	H^{2n+1}	$O(2n+1)$	$2n$	0
$O(2n, 1)/K$	H^{2n}	$O(2n)$	$2n-1$	0
$U(n, 1)/K$	$H^n(C)$, hiperbólico complejo	$U(n) \otimes U(1)$	$2(n-1)$	1
$Sp(n, 1)$	$H^n(H)$, hiperb. cuaternionico	$Sp(n) \otimes Sp(1)$	$4(n-1)$	3
F_4	plano de Cayley	$O(9)$	8	7

Tabla 2.2: Coeficientes de los potenciales correspondientes a espacios simétricos compactos

Denominaremos al término de partida $W(r) \equiv \frac{f(r)}{2}$ *superpotencial* del sistema, por razones que se verán en la sección siguiente.

El mismo resultado puede obtenerse aplicando técnicas de scattering inverso —en este caso las conocidas para la ecuación radial—, ver para ello [72]

El caso compacto es dual al anterior, pasamos de los espacios hiperbólicos a los elípticos) realizando un cambio $r \rightarrow i\theta$.

En particular, para las esferas S^n obtenemos un laplaciano

$$\Delta(S^n) = \frac{d^2}{d\theta^2} + (n-1) \cot \frac{d}{d\theta} + \Omega \quad (2.5)$$

de donde el superpotencial $W = \frac{n-1}{2} \cot \theta$ nos produce un potencial usual

$$V_{S^n}(\theta) = \frac{1}{4} \frac{n^2 - 4n + 3}{\sin^2 \theta} \quad (2.6)$$

El resto de valores de $m_\alpha, m_{2\alpha}$ y los espacios a que corresponden vienen dados en la tabla 2.2

El hecho de haber obtenido potenciales correspondientes a funciones periódicas se puede interpretar como un efecto de la imposibilidad de definir el scattering asintótico para estos espacios. El efecto de la compacidad del espacio traduce directamente a una ecuación en un compacto.

Finalmente, intermedio entre los casos elíptico e hiperbólico nos queda el caso euclideo, con espacios R^n donde la ausencia de curvatura debe reflejarse en ausencia de scattering. Lo que obtenemos es un laplaciano

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \Omega \quad (2.7)$$

y por tanto un superpotencial $W = \frac{1}{2}(n-1)/r$ y un potencial convencional

$$V(r) = \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} \quad (2.8)$$

que es invariante de escala, y por tanto el scattering se limita a un desplazamiento constante de fase

$$\delta_n(k) = \frac{(3-n)\pi}{4} \quad (2.9)$$

2.2 SUSY QM

Como hemos dicho, los hamiltonianos anteriores presentan el interesante rasgo de poder ser contruidos con técnicas de supersimetría. Este fenómeno, que simplifica enormemente la construcción del espectro, resultará menos sorprendente una vez notemos la relación entre los operadores obtenidos y los hamiltonianos libres.

Veamos como se realiza susy en estos casos. La implementación más simple de supersimetría en mecánica cuántica comprende dos operadores C, Q hermíticos anticonmutantes, cumpliendo:

$$C^2 = I \quad Q^2 = H \quad \{C, Q\} = 0 \quad (2.10)$$

siendo H un operador atuadjunto que es el hamiltoniano del sistema.

En dimensión uno esto se puede plantear con las matrices de Pauli, poniendo

$$Q(r) = \sigma_2 p_r + \sigma_1 W(r) \quad C = \sigma_3 \quad (2.11)$$

Esta formulación viene a darnos una extensión de las técnicas de factorización. Tenemos que H diagonaliza en suma directa de dos hamiltonianos

$$H_{\pm} = p^2 + W^2 \pm W' \quad (2.12)$$

W es el llamado “superpotencial” de la teoría. Si ponemos explícitamente

$$A = \frac{d}{dr} + W(r) \quad A^+ = -\frac{d}{dr} + W(r) \quad (2.13)$$

vemos que la factorización es

$$H_+ = AA^+ \quad H_- = A^+A \quad (2.14)$$

Diremos que dos operadores con esta factorización comun son *partners* supersimétricos. En general, basta con que A sea un operador (densamente

definido) cerrado para que H_+ y H_- sean operadores autoadjuntos, por ejemplo ver [63].

La propiedad fundamental que vamos a explotar es que el espectro de dos operadores supersimétricos coincide para todo autovalor distinto de cero (para todo estado de energía mayor que el fundamental). El estado correspondiente al vacío, cuando existe, carece de partner: para verlo, observemos que la función de ondas del estado fundamental se puede construir a partir del superpotencial como

$$\Psi^0 = e^{\int^x \pm W(x) dx} \quad (2.15)$$

aplicando directamente $A\Psi = 0$ o $A^+\Psi = 0$ según el caso. y obviamente para un W dado solo uno de los dos como máximo puede definir una función de ondas normalizable.

La selección del signo \pm de W en 2.15 depende pues de cual de los dos partners posee este nivel en su espectro. Sin perder generalidad, podemos fijar que el partner V_+ sea el que posee el nivel del vacío, en caso de que exista.

Para el resto del espectro, el operador de *supercarga* A (en el caso general usamos Q) nos da la ligazón. En efecto, si Ψ es autofunción de H_- , trivialmente $\Phi = A\Psi$ lo será de H_+ con el mismo autovalor:

$$A^+A\Psi = \lambda\Psi \Rightarrow AA^+\Phi = AA^+A\Psi = \lambda A\Psi = \lambda\Phi \quad (2.16)$$

H_+ y H_- difieren pues como máximo en el estado ligado de menor energía, y la autofunción de este viene dada por la fórmula anterior. Encontrar un par susy es equivalente a resolver el problema de añadir (resp. quitar) un estado ligado a H_- (resp. H_+) y por tanto nos da un método para reducir hamiltonianos, en el sentido del capítulo anterior, sección 1.4.1.

Estas propiedades nos serán muy útiles para construir soluciones a familias de potenciales unidos con simetrías susy (esto es, con escaleras susy)

2.2.1 Ejemplo de la delta

El ejemplo más sencillo de par susy nos lo da el potencial $\delta(x)$. Veamos como el hamiltoniano correspondiente a este potencial es Susy al mismo hamiltoniano con un cambio de signo en la constante de acoplo.

Para ello, usamos el superpotencial [11]

$$W(x) = 2gH(x) - 1, \quad (2.17)$$

donde H es la función salto de Heaviside y vemos directamente que los hamiltonianos correspondientes tienen como potenciales

$$V_{\pm} = W^2 \pm W' = \pm g\delta(x) + cte \quad (2.18)$$

correspondientes respectivamente a una delta repulsiva, con sólo un polo virtual en la matriz S , por tanto sin estados ligados, y a una delta atractiva, con un único estado ligado, como es conocido.

Este ejemplo tiene además el rasgo singular de ser supersimétrico a otro potencial de su misma familia; es un caso particular de los potenciales *shape invariant* de Gendenstein, pero no incluido en las familias que él da de forma explícita.

Es posible resolver directamente el problema a partir de su planteamiento Susy, obviando la integración de la delta. Para ello nos restringimos a funciones en $\mathbb{R} - \{0\}$ y tomamos dominios:

$$D(A) = D(A^+) = \{\Psi(x) \in AC(\mathbb{R} - \{0\}) | \Psi(0^+) = \Psi(0^-)\} \quad (2.19)$$

Ahora, calculamos $H_- \equiv A^+A$ teniendo en cuenta los dominios. En concreto el dominio de A^+A vendrá dado por el de A más la condición de empalmar dominio de A^+ con rango de A , esto es, $(A\Psi)(0^+) = (A\Psi)(0^-)$. Escribiendo esta última explícitamente,

$$\Psi'(0^+) + (2gH(0^+) - 1)\Psi(0^+) = \Psi'(0^-) + (2gH(0^-) - 1)\Psi(0^-), \quad (2.20)$$

e incorporando la primera, $\Psi(0^+) = \Psi(0^-) \equiv \Psi(0)$, obtenemos la conocida condición de contorno de la interacción delta:

$$\Psi'(0^+) - \Psi'(0^-) = g\Psi(0) \quad (2.21)$$

2.2.2 Efecto de susy en la matriz S

Restringiéndonos al caso que estamos estudiando, examinemos el efecto de la operación de supersimetría en los coeficientes de la matriz S .

Ya conocemos que el efecto global es el mismo que el de añadir o quitar un polo de S , como se describió en la sección 1.4.1. Nos interesamos ahora por el efecto en el comportamiento asintótico.

Dado que las autofunciones de cada partner están relacionadas por el operador local A , su relación asintótica dependerá de $W(\pm\infty)$.

En particular, si el potencial es par (correspondiendo con un superpotencial impar, $W(x) = -W(-x)$) podemos tomar la matriz S diagonalizada y examinar los defasajes par e impar para los dos partners. Se demuestra [11] que la relación susy conlleva una transformación:

$$\delta_+^{par} = \delta_-^{impar} - \alpha \quad (2.22)$$

$$\delta_+^{impar} = \delta_-^{par} - \alpha \quad (2.23)$$

donde $\tan \alpha = W(+\infty)/k$. En particular, si W se anula en el infinito, la operación de supersimetría equivale a un intercambio de los desfases.

2.3 Cálculo de espectros con escaleras SUSY

Una vez hemos comprendido como y cuando un par SUSY difieren en su espectro, podemos aplicar este conocimiento para relacionar familias de hamiltonianos e ir construyendo progresivamente sus estados ligados y sus autofunciones correspondientes.

El método que utilizaremos fija que el estado fundamental de H_+ tenga autovalor cero por construcción, obtiene el resto del espectro a partir de H_- utilizando el operador de susy, y toma este hamiltoniano con un autoestado más como punto de partida para un nuevo par susy. Esquematizamos esta iteración en la figura 2.1. En cada paso:

1. Tomamos un hamiltoniano H_+^0 con solución conocida y espectro positivo, con el cero en el espectro. Buscamos un superpotencial W que lo produzca. El hamiltoniano original ha de hacer aquí el papel de H_- , esto es, no ha de tener estado de energía cero y para ello permitimos desplazar el origen de energías de H_+^0 , i.e. hacemos $H_- = H_+^0 + \Delta E_0$
2. Si hay un estado de energía cero (y nos interesa asegurarnos de ello al construir W) en H_+ , su autofunción es

$$\Psi_0(\theta) = e^{-\int W(\theta)d\theta} \quad (2.24)$$

3. El gap entre el estado que hemos añadido y los anteriores es justamente el desplazamiento que hemos realizado en el paso 1. Tomamos pues nota de ello.
4. Construimos el resto de los autoestados del partner H_+ utilizando el operador A^+ sobre los autoestados de H_-

$$A^+|\Psi_n \rangle = |\Phi_{n+1} \rangle \quad (2.25)$$

5. Tomamos el nuevo hamiltoniano H^+ así construido como punto de partida para un nuevo ciclo.

En cada iteración añadimos pues un autoestado y desplazamos el resto del espectro un gap que resulta ser la diferencia $H_-^{(i)} - H_+^{(i-1)} = cte$ entre el hamiltoniano partner H_- y el anterior de la escalera SUSY.

Naturalmente el paso complicado de la escalera es encontrar en cada momento el superpotencial W que necesitamos. Este nos viene dado al “bajar” la escalera, i.e. cuando estamos eliminando estados, pero no en el proceso habitual de “ascensión”, y debemos resolver el problema en cada caso concreto.

Figura 2.1: Empalme de varios pares susy en escalera

En cada paso podemos obtener un nuevo autovalor y arrastrar todas las autofunciones previamente calculadas.

2.3.1 Potenciales equivalentes-Susy al potencial cero

Dado que una supersimetría modifica como mucho el estado fundamental del espectro, la estrategia general será tomar hamiltonianos con espectro conocido, de resolución sencilla, e ir aplicando la simetría.

Un buen punto de partida para estas escaleras es un hamiltoniano libre, con espectro conocido y matriz S trivial (e invariante de escala, esto es, sin dependencia en k). Los distintos potenciales que vayamos construyendo añadirán polos a la matriz S , pero no modificarán propiedades en el espectro continuo.

Así, nos interesa preguntarnos cuáles son todos los potenciales supersimétricos con el libre. Para ello resolvemos la ecuación:

$$W^2(r) \pm W'(r) = \text{const.} \quad (2.26)$$

Obtenemos [10] cinco familias de soluciones,

$$W(r) = \begin{cases} 1/r \\ \tan r \\ \tanh r \\ \cot r \\ \coth r \end{cases} \quad (2.27)$$

que cuando la constante en 2.26 es fijada a 0 o a ± 1 nos dan superpotenciales con el potencial libre como primer partner. La iteración de el procedimiento

nos dará cinco familias de potenciales invariantes de forma (en el sentido de Gengenshtein, esto es cada transformación corresponde simplemente a un cambio de constantes de acoplo)

$$V_l(r) = \begin{cases} l(l+1)/r^2 \\ l(l+1)\sec^2 r \\ -l(l+1)\operatorname{sech}^2 r \\ l(l+1)\operatorname{cosec}^2 r \\ l(l+1)\operatorname{cosech}^2 r \end{cases} \quad (2.28)$$

Ahora, tenemos que considerar el dominio de definición de cada operador $A = \frac{-d}{dx} + W(x)$ si queremos evitar anomalías al comparar espectros de H_+ y H_- [12]

Los superpotenciales $\tan r$ y $\cot r$ tienen un conjunto periódico de singularidades, así que la imposición de condiciones de contorno nos reduce el operador H_- al libre sobre un compacto $[a, b]$. Para el problema que nos ocupa en este capítulo, donde hemos tomado variables radiales, nos interesa trabajar con $\cot r$, ya que $\tan r$ no fuerza anulación en el origen de las soluciones.

En los casos de $W = 1/r$, $W = \coth r$ tenemos solamente una singularidad en el origen, lo que no afecta en el caso radial, y van a corresponder de hecho a los casos euclídeo e hiperbólico de este estudio. Notemos que si estuviéramos trabajando con toda la recta, $W = 1/x$, $W = \coth x$, tendríamos que imponer en el dominio de A la anulación de la función de ondas en cero, y la construcción susy nos daría el operador libre restringido a dos semirrectas incomunicadas, uno de los casos extremos de interacciones de soporte puntual que estudiaremos con más detalle en el capítulo 4. Un punto interesante es que la diferencia entre estos dos potenciales coincide asintóticamente con la función escalon $H(x)$, que ya hemos usado en el ejemplo de la delta.

Finalmente, el superpotencial $W_l = l \tanh r$ carece de singularidades y las autofunciones que produzca tampoco tienen porque anularse en el origen. Este operador es más interesante extendido a toda la recta, ya que con $W_l = l \tanh x$ podemos definir Q con el mismo dominio que el operador libre en \mathbb{R} y, aplicando sucesivamente susy, la familia

$$V(x) = -l(l+1)\operatorname{sech}^2 x, \quad l = 0, 1, \dots \quad (2.29)$$

nos dará potenciales transparentes (*reflectionless scattering*), con S -matrix [10]

$$S^l(k) = (-)^l \frac{(k+i)(k+2i)\dots(k+il)}{(k-i)(k-2i)\dots(k-il)}. \quad (2.30)$$

Esta matriz S se construye a partir de la trivial $S = I$ y es entonces racional; en otras palabras, la función de Jost es proporcional a un polinomio y sus ceros vienen dados por los estados ligados, en $k = i n$, $n = 1..l$. Notemos también que para l par (alt. impar) el scattering en onda par (resp. impar) es anómalo, porque hay una resonancia de energía cero.

2.3.2 Susy en el setup de scattering geométrico

En el caso de espacios simétricos Riemannianos de rango uno, vemos ya como uno puede construir una formulación de mecánica cuántica SUSY.

Los potenciales de espacios no compactos se obtendrán del superpotencial

$$W_{m_\alpha, m_{2\alpha}}(r) = \frac{m_\alpha}{2} \coth r + m_{2\alpha} \coth 2r \quad (2.31)$$

El caso compacto se obtiene transformando $r \leftrightarrow i\theta$

$$W_{m_\alpha, m_{2\alpha}}(\theta) = \frac{m_\alpha}{2} \cot \theta + m_{2\alpha} \cot 2\theta \quad (2.32)$$

Y el caso euclídeo, intermedio entre los dos, provendrá de

$$W_n(x) = \frac{n-1}{2} \frac{1}{x} \quad (2.33)$$

Notemos entonces que las cinco familias calculadas en la sección precedente contienen tanto el caso no compacto como el compacto de los operadores estudiados en la sección 2.1.2. Un cambio de variable $r \leftrightarrow i\theta$ nos lleva de una a otra familia de soluciones, como ocurría entre los casos hiperbólico y elíptico anteriormente.

Queda aparte la solución r^{-2} , que al aplicar el cambio de variable resulta transformada en otra de la misma familia. Esta solución resulta corresponder a la descripción de scattering en el caso de espacio euclídeo, carente de curvatura, que ya hemos visto también anteriormente.

La asociación del superpotencial $1/r$ al caso euclídeo resulta quizás la más interesante, ya que los potenciales generados van a ser ubicuos en la teoría de scattering en 1D debido a sus propiedades frente a cambios de escala: $V = 1/x^2$ escala igual que el término cinético, y por tanto entra en la construcción y aproximación de operadores invariantes de escala.

2.3.3 Escaleras de potenciales de scattering geométrico

La construcción anterior nos permite relacionar entre sí las descripciones de scattering geométrico correspondientes a diferentes espacios. Ahora, es necesario determinar los superpotenciales que nos van a permitir construir

las escaleras. De hecho vamos a ver que, más que construir escaleras Susy sobre las familias de geometrías, encajaremos éstas en un conjunto más general de interacciones conectadas por SUSY.

Vamos a detallar aquí el caso compacto. Recordemos nuestro set-up una vez más: se ha realizado la habitual continuación f . *hiperbólicas* \rightarrow f . *elípticas* y tenemos el siguiente esquema de supersimetría

$$W(\theta) = \frac{1}{2}(m_\alpha \coth \theta + 2m_{2\alpha} \coth 2\theta) \quad (2.34)$$

$$A = -\frac{d}{d\theta} + W(\theta) \quad A\Psi_0(\theta) = 0 \quad (2.35)$$

$$H_+ = A^+A \quad H_- = AA^+ \quad (2.36)$$

con el que construiremos escaleras de factorizaciones susy, esto es, series de superpotenciales

$$W_j \rightarrow W_{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow W_k \quad (2.37)$$

con la propiedad de que el potencial $V_+^{(i)}$ tiene la misma forma que el $V_-^{(i+1)}$

En nuestro caso, con dos parámetros libres, observamos que se pueden proponer tres tipos de escaleras no triviales, y los tres saltos posibles permiten recorrer un amplio espacio de parámetros. Sumarizamos el esquema de relaciones en la figura 2.2. Como vemos las operaciones pueden bien decrementar m_α , bien $m_{2\alpha}$, bien ambos; aunque en los dos últimos casos, es necesario saltar dos veces, cruzando por pares susy que carecen de estado de vacío, y por tanto son isoespectrales. No resulta interesante apoyarse en ellos y por ello la construcción más directa es la primera, siguiendo la escalera en la que se enlaza

un superpotencial $W_{m_\alpha, m_{2\alpha}}$ con el correspondiente $W_{m_\alpha, m_{2\alpha}-2}$

evitando así las complicaciones innecesarias.

Aplicando el razonamiento previo en esta escalera principal, el espectro de un potencial $m_\alpha, m_{2\alpha}$ será [14]:

$$E_{\nu, m_\alpha, m_{2\alpha}} = \left(\frac{1}{2}m_\alpha + m_{2\alpha} + \nu\right)\nu \quad (2.38)$$

El resultado es válido para cualquier par $(m_\alpha, m_{2\alpha})$. En particular, para los potenciales correspondientes a espacios compactos (de rango uno) tenemos la tabla 2.3:

Como resultado adicional, observamos que todos los potenciales correspondientes a una línea $cte = \frac{1}{2}m_\alpha + m_{2\alpha}$ serán isoespectrales.

Como caso particular, para las esferas S^n el superpotencial es sencillamente $W = \frac{n-1}{2} \cot \theta$; tenemos $m_{2\alpha} = 0$, y resulta más conveniente utilizar

Espacio	m_α	$m_{2\alpha}$	$E(n, \nu)$
$P^n(\mathbb{R})$	$n - 1$	0	$(\frac{1}{2}(n - 1) + \nu)\nu$
$P^n(\mathbb{C})$	$2(n - 1)$	1	$(n + \nu)\nu$
$P^n(H)$	$4(n - 1)$	3	$(\nu + 2n + 1)\nu$
$P^n(O)$	8	7	$(\nu + 11)\nu$

Tabla 2.3: Espectro de energías para los potenciales correspondientes a espacios riemannianos simétricos de rango uno, tipo compacto

una escalera decreyendo m_α . Tendríamos el espectro

$$E_{\nu, n} = \nu(\nu + n - 1) \quad (2.39)$$

El estado fundamental del hamiltoniano será $\Psi_0 = \sin^{\frac{n-1}{2}} \theta$. (El estado correspondiente en S^n resulta ser constante, ya que la transformación usada para eliminar términos lineales lleva precisamente este factor, vid [14]).

El primer estado excitado será

$$\Psi_1^\lambda = A_\lambda^+ \Psi_0^{\lambda-1} = \left(\frac{d}{d\theta} + \lambda \cot \theta \right) \sin^{\lambda-1} \theta \quad (2.40)$$

Para ser concretos, tomemos por ejemplo S^2 y veamos como queda todo en la notación original. Los superpotenciales y el estado fundamental son

$$W = V = \Psi_0 = F(\theta)\Phi_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \sqrt{\sin \theta} = \text{const} \quad (2.41)$$

y para el primer estado excitado aplicamos el operador de supercarga y obtenemos

$$\sqrt{\sin \theta} \left(\frac{-d}{d\theta} + \frac{3}{2} \cot \theta \right) \sqrt{\sin \theta} = \cos \theta \quad (2.42)$$

La familia de saltos SUSY no solo abarca esferas S^{2n-1} y los otros espacios simétricos. Aparecen también potenciales que no tienen correspondencia con espacios homogéneos. Sería interesante ver si podemos localizarlos dando más libertad a la hora de cocientar G/K , por ejemplo incluyendo simetrías discretas u otros subgrupos. En la literatura aparecen análisis de estos cocientes [20] que utilizan también técnicas susy, pero es incierto el paralelo con nuestro método.

Figura 2.2: Emparejamientos Susy en el espacio de parámetros $m_\alpha, m_{2\alpha}$
Hay tres composiciones de saltos posibles, pero algunos de ellos se apoyan en pares isoespectrales (zona rayada)

Capítulo 3

Trayectorias y polología

Dilataciones de la constante de acoplo y cambios de escala. Trayectorias a la Regge para diversos potenciales, singulares y no singulares. Argumentación por teoría de perturbaciones del comportamiento con acoplos elevados. Movimiento de los polos de la matriz S . Polología de diversos potenciales: ejemplos del pozo, de la delta simple doble y triple. Polos de potenciales transparentes. Puntos singulares en los recorridos de los polos.

Algebrista te volviste
refinado hasta la esencia
oligarca de la ciencia
matemático bacán
hoy miras a los que sudan
en las otras disciplinas
como dama a pobres minas
que laburan por el pan < Te acordás
que en otros tiempos
sin mayores pretensiones
mendigabas soluciones
a una misera ecuación?
Hoy la vas de riguroso
revisás los postulados
y junas por todos lados
la más vil definición

Pero no engrupís a nadie
y es inútil que te embales
con anillos, con ideales
y con Álgebras de Boole
Todos saben que hace poco
resolviste hasta matrices
y rastreabas las raíces
con el método de Sturm

Pero puede que algún día
con las vueltas de la vida
tanta cáscara aburrida
te llegue a cansar al fin
y añoses tal vez el día
que sin álgebras abstractas
y con dos cifras exactas
te sentías tan feliz

E. Gentile, *El algebrista* (Tango)

3.1 Trayectorias de autovalores

Los polos imaginarios puros de la matriz S_k corresponden, cuando se encuentran en el semieje positivo, a los estados ligados del potencial con energía $-k^2$. Una primera aproximación al comportamiento de la matriz S bajo dilataciones del acoplo nos la da, por tanto, el estudio de las trayectorias de dichos niveles de energía.

Así, con un espíritu cercano al del análisis de trayectorias de Regee, podemos evaluar la dependencia de los autovalores del hamiltoniano unidimensional $\frac{d^2}{dx^2} + \lambda V(x)$ con el escalado de la cte. de acoplo λ

El comportamiento a baja energía está descrito en la literatura (ver [35, 31, 49] y referencias allí) con suficiente detalle. Por ello sólo damos argumentaciones analíticas, basadas en teoría de perturbaciones, para el caso asintótico $\lambda \rightarrow \infty$.

Plots y aproximaciones analíticas para el potencial de Yukawa $\frac{e^{-kr}}{r}$ se pueden encontrar en [30], y debemos esperar características próximas a estos resultados. En particular se verá que el comportamiento en los niveles altos de energía no es dependiente de la forma del potencial; la única dependencia que encontraremos será con el orden de singularidad de éste.

Notemos que poniendo la ecuación de Schrödinger en la forma

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + E\right)\Psi(x) = -gV(x/b)\Psi(x) \quad (3.1)$$

las dimensiones de g se pueden considerar junto con el coeficiente b que nos da la anchura del potencial, así, si g tiene dimensión $[L]^{-2}$, como es el caso del pozo, el escalado viene controlado por el parámetro adimensional

$$\lambda = \sqrt{gb^2} \quad (3.2)$$

a través de una dependencia

$$k_n(g, b) = \frac{1}{b}F_n(\lambda^2); \quad E_n \equiv -k_n^2 \quad (3.3)$$

Podemos luego sin pérdida de generalidad fijar b (digamos $b = 1$) y estudiar $k_n(\lambda) \equiv \sqrt{-E_n}$ simplemente como dependencia del acoplo. Pero también podríamos fijar g y el mismo estudio nos ilustraría el efecto de la dilatación del soporte del potencial.

3.1.1 Resultados para distintos potenciales

Hemos escogido cuatro potenciales regulares, a saber

- el pozo cuadrado, $V(x) = \begin{cases} -g, & -1 < x < 1 \\ 0, & \end{cases}$
- el pozo exponencial $V(x) = -ge^{-|x|}$
- el gaussiano $V(x) = -\frac{g}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$
- y el pozo $V(x) = -g \cosh^{-2} x$, transparente en valores críticos¹,

y dos potenciales singulares,

- Yukawa, $V(x) = -g \frac{e^{-|x|}}{|x|}$
- y Hulthen, $V(x) = -g \frac{e^{-|x|}}{1-e^{-|x|}}$, que es una aproximación soluble del anterior.

Esta selección nos permitía mantener el control del cálculo numérico por comparación a soluciones conocidas de algunos casos.

Para cada uno de estos potenciales, calculamos las gráficas (ver apéndice para detalles del cálculo) de k_n versus $g^{1/2}$ —en la práctica, de E_n versus g —, manteniendo $b = 1$. En la figura 3.1 vemos los resultados correspondientes al primer grupo de potenciales. La regularidad entre los gráficos es aparente por simple inspección.

En los potenciales singulares la metodología es idéntica, aunque tenemos que excluir los autovalores pares, pues tenemos una singularidad similar a la del problema de Coulomb (interpretando $V(r)$ como $V(x)$); sabemos que la onda par no existe si $V(x) \propto 1/x$ ó $\frac{1}{x^2}$. En la figura 3.2 vemos los resultados para los potenciales de Yukawa y de Hulthen. Hemos realizado también un cálculo para algunos puntos del potencial de Coulomb (figura 3.3), del mismo nivel de singularidad, y vemos el mismo comportamiento cualitativo aunque los resultados exactos quedan oscurecidos por la densidad de estados; en este caso el cálculo numérico exige un control más detallado de la precisión, pero aquí se trataba sólo de una comparación cualitativa con los otros potenciales singulares de decrecimiento más rápido.

Los potenciales regulares presentan un comportamiento lineal $E_n \approx \alpha_n \lambda + \beta_n$ en cuanto los niveles E_n son lo suficientemente altos. (Para energías muy bajas, el resultado debe cumplir la aproximación de alcance efectivo)

Las líneas son sensiblemente paralelas, esto es, observamos $\alpha_n = cte.$ independientemente del nivel de energía.

¹Como se ha explicado en el capítulo anterior, cuando $g = l(l+1)$, con l entero, hay un estado semiligado en $k = 0$ y el coeficiente de reflexión se anula.

Figura 3.1: Variación de la energía de ligadura con respecto a la constante de acoplo para algunos potenciales regulares de corto rango se representa $k = \sqrt{-E_n}$ frente a $\lambda = \sqrt{g}$ para los potenciales descritos en el texto

Figura 3.2: Variación de la energía de ligadura con respecto a la constante de acoplo para potenciales singulares
se representa $k = \sqrt{-E_n}$ frente a $\lambda = \sqrt{g}$ para los potenciales descritos en el texto

Figura 3.3: Variación de la energía de ligadura con respecto a la constante de acoplo en un potencial de Coulomb

Para los potenciales singulares, la dependencia deja de ser lineal; el plot tiene mejor fit cuadrático, $E_n \approx \alpha_n \lambda^2$ para acoplo lo suficientemente grande.

No hemos realizado cálculos para singularidades del orden r^{-2} , en las que la adimensionalidad del acoplo y el fenómeno de caída del potencial dan lugar a comportamientos peculiares que deben ser fijados previamente [38].

3.1.2 Justificación en teoría de perturbaciones

El comportamiento lineal podría justificarse por ejemplo invocando la fórmula de Hellman-Feynman [30]. Pero para estos potenciales resulta educativo justificarse directamente en teoría de perturbaciones, considerando un escalado próximo a la identidad como una pequeña perturbación del potencial inicial.

Tomemos un hamiltoniano $H_0 = T + \lambda V(x)$. Un pequeño incremento $\delta\lambda$ de la constante de acoplo corresponde a perturbar H_0 con un término $\delta\lambda V(x)$.

Si el potencial es no singular y decrece lo suficientemente rápido la perturbación es pequeña respecto a H_0 y el primer orden de la variación de energía es

$$\delta E_i^{(1)} = \delta\lambda \langle \Psi_i^{(0)} | V | \Psi_i^{(0)} \rangle \quad (3.4)$$

mientras que el segundo orden varía con $(\delta\lambda)^2$

$$\delta E_i^{(2)} = (\delta\lambda)^2 \sum_{j \neq i} \frac{|\langle \Psi_i^{(0)} | V | \Psi_j^{(0)} \rangle|^2}{E_i^{(0)} - E_j^{(0)}} \quad (3.5)$$

La función de ondas no es afectada en primer orden. Así, si λ y E_n son grandes, segundo y subsecuentes términos de la expansión pasan a ser muy pequeños comparados con el primero, y el comportamiento lineal prevalece:

$$\frac{dE_n}{d\lambda} \sim \langle \Psi_i^{(0)} | V | \Psi_i^{(0)} \rangle \quad (3.6)$$

En el caso de potenciales singulares el razonamiento anterior no es aplicable directamente, pero podemos utilizar el método descrito por GP[30, 29] para potenciales con singularidad tipo Coulomb y construir su desarrollo en potencias del acoplo.

Para ello tomamos como H original el coulombiano radial

$$H_0 = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2g}{r} \quad (3.7)$$

en nuestro caso en onda $l = 0$, y como perturbación el resto del potencial

$$V_1(r) = -\frac{2g}{r}(V(r) - 1) \approx -2g(v_0 + v_1r + v_2r + \dots) \quad (3.8)$$

Con este input, se prueba [30] que los niveles de energía son

$$E_{nl} = -g^2/n^2 - 2v_0g - 2A_nv_1 - 2B_nv_2\frac{1}{g} + O\left(\frac{1}{g^2}\right) \quad (3.9)$$

Donde la dependencia principal resulta ser efectivamente cuadrática con el acoplo, como intuíamos en las gráficas de las figuras 3.2, 3.3

3.1.3 Efecto del escalado en los defasajes

Ademas de la variación del espectro discreto, podemos interesarnos también por las posibles alteraciones de la parte continua de éste. Ello nos obligaría en principio a estudiar directamente la matriz S , como haremos en la siguiente sección. Pero dado que estamos trabajando con potenciales pares, podemos considerar la forma diagonal de la matriz y concentrarnos en los defasajes en onda par e impar.

En cierto modo este es otro paso previo al estudio completo en todo \mathbb{C} : Antes hemos estudiado el comportamiento en el semieje imaginario positivo

de S_k , ahora estudiamos lo que ocurre en el semieje real positivo, la parte más “física” de la matriz S_k

En la figura 3.4 vemos el cálculo realizado para el potencial $\cosh^{-2} x$ a distintos niveles del acoplo. Vemos que la variación en la zona de momentos altos es regular, y coincide para ambos desfases. En cambio, cuando k es próximo a cero al movimiento del desfase con el acoplo es claramente dependiente de la aparición de nuevos estados ligados, como esperamos por el teorema de Levinson: Para g no crítica ($g \neq l(l+1)$) el comportamiento es el usual, pero para g crítica aparece el nuevo estado ligado a $k = 0$ y los defasajes δ_+, δ_- se igualan; por tanto estos deberán ser “anómalos” alternativamente en cada nueva aparición.

3.2 Polología de la matriz S_k

Se puede ver en [57, 70, 67] como la variación de los polos de la matriz de scattering presenta rasgos genéricos independientemente del potencial.

Algunos de estos rasgos emanan directamente de las propiedades generales: La simetría de la matriz S respecto al eje imaginario, junto con la analiticidad de la dependencia del acoplo, implica que para aumentar el número de estados ligados cada par de polos debe caer simétricamente hacia el eje imaginario, para después ir uno hacia $+i\infty$, creando el estado ligado y el otro compensar yendo hacia $-i\infty$, el único sitio por el que puede desaparecer.

En soluciones a problemas específicos aparecen otras propiedades: Por ejemplo, existen polos que permanecen fijos [46, 41], y hay puntos privilegiados en el eje imaginario por donde “entran” todos los polos de una determinada familia [57].

La mayoría de estudios dedicándose a potenciales en 3D, nos ha parecido necesario evaluar la polología de algunos potenciales en una dimensión.

3.2.1 Resultados conocidos. Pozo

El pozo cuadrado, o la barrera cuadrada, es un típico potencial de rango finito, que –a diferencia de las deltas que trataremos a continuación– puede soportar un número finito de estados ligados arbitrario y que se incrementa a medida que aumenta la intensidad del potencial (con signo negativo).

$$\begin{aligned} V(x) &= V_o, & |x| < b, \\ &= 0, & |x| > b. \end{aligned} \tag{3.10}$$

La polología del pozo cuadrado está bien cubierta para la onda impar, para ambos signos de la intensidad de acoplo V_o [58, p.221]; así que solo

Figura 3.4: Desfases $\delta_{\pm}(k)$ del potencial sech^2 para diversos valores de la constante de acoplo

haremos una discusión mínima de este caso. La solución se obtiene encajando las soluciones "cuasi-libres" a través del salto de potencial, esto es

$$\Psi = A \cos k'x \quad (|x| < b), \quad (3.11)$$

$$\Psi = B \cos(kx + \delta_+) \quad (|x| > b), \quad (3.12)$$

donde $k'^2 = k^2 - 4V_0$. La matriz S par se obtiene directamente como

$$S_+(k) = e^{2i\delta_+}(k) = \frac{J^+(-k)}{J^+(+k)} \quad (3.13)$$

$$= e^{-2ikb} \frac{k + ik' \tan k'b}{k - ik' \tan k'b}, \quad (3.14)$$

lo que puede compararse [58, p.220] con las fórmulas similares para el caso impar, el cual corresponde a scattering tridimensional en onda s . La función de Jost correspondiente se ha obtenido de la forma descrita en 1.3.4, y es

$$J^+(k) = e^{ikb} \cos(kb) \left(1 - i \frac{k'}{k} \tan k'b\right) \quad (3.15)$$

y exhibe el comportamiento correcto, pero los ceros en $kb = (2n+1)\pi/2$ se cancelan en la matriz S .

Pensemos primero el caso del pozo ($V_0 < 0$); localizando los ceros para $V_0 \rightarrow 0$ obtenemos el resultado esperado

$$k = 0; k = (2n+1)(\pi/2) - i\infty. \quad (3.16)$$

El primer cero sale de $k = 0$ cuando $g \equiv V_0 = 0$, y corresponde al scattering "anómalo" $S(0) = -1$ de la onda par en $k = 0$. De aquí el cero va a $+i\infty$ a medida que el acoplo es más atractivo, $g \rightarrow -\infty$.

El resto de los ceros pares se comportan con una pauta completamente regular, como hacen todos los ceros impares aparte del primero. Simplemente corren desde $-i\infty$ en $g = 0$ hacia el eje imaginario negativo, donde coalescen en pares formando un polo doble de estados virtuales. De cada par, uno de los polos va hacia arriba, a formar un estado ligado cuando cruce el origen, y el otro va a morir hacia el infinito negativo imaginario $k = -i\infty$ con $g \rightarrow -\infty$. La dependencia analítica de $S(k)$ con el acoplo impide que estos polos puedan desaparecer "espontáneamente", justificando así matemáticamente este comportamiento.

Todos los ceros coalescen en el mismo punto, a saber, $k = 0 - 2i$ en nuestras unidades, y lo mismo ocurre con los ceros impares genéricos. La figura 3.5 muestra algunos detalles

Figura 3.5: Polos de la matriz S del pozo cuadrado
Trayectorias con el acoplo, para la onda par

El caso de la barrera $g \equiv V_0 > 0$ es bastante similar, y de nuevo sólo la onda par es nueva; ahora en el límite repulsivo extremo $g \rightarrow +\infty$ los ceros despegan asintóticamente del eje real y se hunden paralelamente al eje imaginario a medida que decrece el acoplo, exactamente como en el caso impar, ver [58, p.223]. La figura 3.6 contiene algunas trayectorias para esta barrera de potencial.

3.2.2 Movimiento de delta

Retomemos ahora los ejemplos de deltas de la sección 1.3.3, que comienzan con una polología sencilla y se van complicando progresivamente.

Comencemos con el potencial con una delta

$$V(x) = g\delta(x), \quad (3.17)$$

recordando que la ecuación integral de la solución de Jost se resolvía de un golpe en este caso, obteniendo,

$$f(x) = e^{ikx} - \frac{1}{k} \sin(kx) f(0) H(-x), \quad (3.18)$$

con $H(x)$ la función salto de Heaviside, como de costumbre. Por tanto

$$f_k(0) = 1 \Rightarrow J^-(k) = 1 \quad (3.19)$$

Figura 3.6: Polología de la onda par de la barrera cuadrada de potencial

$$J^+(k) = 1 + \frac{g}{2ik}, \quad (3.20)$$

y hay sólo scattering en onda par, como era pausable esperar. La amplitud en esta onda tiene un solo polo en $k = -ig/2$, lo que nos da un estado ligado de energía $E = -g^2/4$ para $g < 0$, o un estado virtual para $g > 0$. Por supuesto, este resultado clásico puede obtenerse de muchas otras maneras.

La trayectoria de este único cero es forzosamente seguir recto subiendo por el eje imaginario a medida que el acoplo decrece desde $g = +\infty$ a $g = -\infty$; lo recordamos dibujando la figura 3.7.

Es interesante notar que un potencial puramente repulsivo produce un estado “antiligado”; esto no sucede en tres dimensiones, véase [52, p.359]. La razón es que en nuestro caso el polo de $g = 0$ se sitúa en $k = 0$, ya que un pozo atractivo, incluso infinitesimal, en dimensión uno siempre tiene un estado ligado.

Observemos por último que aquí la matriz $S(k)$ viene dada completamente por este único polo correspondiente al estado ligado; en general debemos esperar contribuciones de polos fuera del eje. Hay otro caso, con potenciales sin reflexión, en el que también el estado ligado basta para caracterizar totalmente la amplitud aunque, a diferencia del caso que nos ocupa, sólo para valores críticos de la constante de acoplo, como veremos en la sección 3.2.4 un poco más adelante.

Figura 3.7: Polología sencilla: el potencial delta

El polo pasa a formar un estado real en el momento que el acoplo se hace negativo, al ser éste un problema 1D

3.2.3 Movimiento de dos y tres deltas

La resolución del caso de dos deltas iguales,

$$V(x) = g[\delta(x + a) + \delta(x - a)], \quad (3.21)$$

también es bien conocida [34, p.131][45, p.216]. La ecuación integral para la solución de Jost es de nuevo inmediata, dando las funciones de Jost

$$J^+(k) = 1 + i\frac{g}{k}e^{ika} \cos ka,$$

$$J^-(k) = 1 + \frac{g}{k}e^{ika} \sin ka,$$

como hemos visto anteriormente.

No es difícil seguir el comportamiento de los ceros, y un plot para los dos primeros aparece en [30]. En general, se obtienen ceros puramente reales para $g \rightarrow \pm\infty$, que corresponden a estados ligados reales de energía positiva, en los que la partícula queda atrapada entre las paredes infinitas (bien positivas, bien negativas) de las dos deltas; normalizando la posición de las deltas a una distancia $a = 1/2$ del origen, estos ceros aparecen en

$$k = (2n + 1)\pi \quad \text{para } J^+ \quad (3.22)$$

$$k = 2n\pi \quad \text{para } J^- \quad (3.23)$$

Para un n genérico ($n \geq 1$), los ceros se mueven apareados a través del semiplano $\Im k < 0$ acercándose asintóticamente a $k = N\pi - i\infty$, a

Figura 3.8: Polología de la doble delta. Onda par

medida que $g > 0$ va a cero; y reemergen para g negativa desde el siguiente $N' = N \pm 1$, volviendo a alcanzar este mismo $N'\pi$ en el eje real $\Re k = 0$ para $g \rightarrow -\infty$; la indeterminación \pm que hemos dejado se fija añadiendo una pequeña parte imaginaria positiva a g cuando $g \rightarrow 0$, en cuyo caso se ejecuta la elección del "salto" con signo menos.

Para $n = 0$ el caso *par* da una trayectoria que salta al eje imaginario cuando los ceros izquierdo y derecho colisionan, para $g = +0.278$; el cero derecho va (nuevamente usando nuestro convenio) hacia abajo, el izquierdo sube. El polo ascendente se transforma en el único estado ligado por una vez cruza el eje real justo para $g = 0$, como corresponde a un potencial 1D. El otro se hunde en el eje imaginario para alcanzar $-i\infty$.

El cero $n = 0$ de la onda impar simplemente asciende por el eje imaginario, desde $-i\infty$ at $g = 0$, hasta $k = 0$ en $g = -1$ (valor al que aparece pues el segundo estado ligado), y sigue moviéndose hacia $+i\infty$ a medida que movemos $g \rightarrow -\infty$.

Las gráficas de las figuras 3.8, 3.9 resumen la descripción anterior, habiendo sido calculadas numéricamente con la convención $\Im g > 0$ antedicha cuando ha sido necesaria.

Algo más allá de los casos habituales, consideremos brevemente el potencial simétrico con tres deltas:

$$V(x) = g[\delta(x+a) + \delta(x) + \delta(x-a)]. \quad (3.24)$$

Figura 3.9: Polología de la doble delta. Onda impar
El paso de los polos por $-i\infty$ se produce en el momento que el acoplo se anula

La integración de (1.11) nos da para la función de Jost *impar*

$$J^-(k) = 1 + (g/k)e^{ika} \sin ka, \quad (3.25)$$

la cual resulta ser, por supuesto, exactamente como en el caso de las dos deltas, ya que la onda impar resulta ciega a una singularidad en el origen. Sin embargo, para la onda par es distinto, y obtenemos:

$$\begin{aligned} J^+(k) &= \frac{i}{k} f'_k(0) \\ &= 1 + \frac{ig}{k} \left(\frac{1}{2} + e^{ika} \cos ka \right) + \frac{ig^2}{2k^2} e^{ika} \sin ka, \end{aligned} \quad (3.26)$$

lo que nos da un máximo de dos estados ligados, como era de esperar, para g grande y negativa; en la figura 3.10 dibujamos únicamente las trayectorias de los primeros ceros de esta onda par. Para $a = 1/2$ el «touchdown» ocurre en diferentes puntos a lo largo del eje imaginario: en $k = -0.7350i$, $g = 0.2149$, para el estado fundamental, y a $k = -0.3742i$, $g = -2.9358$, el segundo estado. Nótese la diferencia con el caso que habría estos calculos, el pozo cuadrado, donde todos caían en el mismo punto del eje \Im .

Figura 3.10: Polología correspondiente al potencial con tres deltas
 Dibujamos sólo los polos de la onda par; la impar no difiere del caso con dos deltas.

3.2.4 Potencial transparente

La polología correspondiente a la función de Jost del potencial 2.29,

$$J(k) \propto \prod_1^l (k - n), \quad (3.27)$$

es también remarcable, porque para un potencial con decaimiento exponencial como es (2.29) uno espera que aparezcan directamente también polos en la función de Jost, dando lugar a polos redundantes en la matriz S , tal como observó primero S.T. Ma en [46]. ¿Qué ha ocurrido?

La respuesta es que la fórmula (2.30) es “inestable”: el potencial (2.29) con g arbitraria sustituyendo a $-l(l+1)$ es uno de una familia de potenciales exactamente solubles por medio de funciones hipergeométricas [44]. Conocida la fórmula para el scattering hacia adelante, uno puede escribir la matriz S diagonal para g arbitrario,

$$S_{\pm}(k) = \frac{1 \pm B}{A} = e^{2i\delta_{\pm}}, \quad (3.28)$$

donde A y B , dados en [44], son

$$A = \frac{\Gamma(-ik)\Gamma(1-ik)}{\Gamma(-ik-s)\Gamma(-ik+s+1)} \quad (3.29)$$

$$B = \frac{\Gamma(ik)\Gamma(1-ik)}{\Gamma(-s)\Gamma(1+s)} \quad (3.30)$$

$$s = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-4g})$$

En particular, los polos en $-ik = n$ son precisamente polos de Ma, en $\Im k > 0$, y resultan ser independientes de la constante de acoplo $g = g(s)$; en los acoplos críticos originales $s = l, g = -l(l+1)$, que formaban la escalera susy al libre (sección 2.3.1) todo desaparece y recobramos (2.30); el potencial es entonces transparente.

Es fácil ver la *unicidad* de los potenciales (2.29), salvo transformaciones isoenergéticas, de hecho las técnicas de scattering inverso se han utilizado [52] para probar que un potencial con reflexión cero es necesariamente de esta forma (2.29).

Capítulo 4

Potenciales de soporte puntual

Obtención de las interacciones con soporte puntual, vía conservación de la probabilidad y vía extensiones autoadjuntas de operadores en $\mathbb{R} - 0$. Otras posibles técnicas de cálculo. Matriz S asociada a una interacción de contacto. Taxonomía: interacción versus separación; deltas de Dirac y de Holden; interacciones invariantes de escala y deltas de Kurasov. Regularización de interacciones de contacto; discusión de Seba; propuestas de Carreau. Teoría de distribuciones de Kurasov, sobre funciones con discontinuidades en el origen. Soluciones formales, suponiendo existencia de regularización. Asociación de significado métrico a extensiones.

Un punto es aquello que
no tiene magnitudes

Euclides, *Elementa*

Nos concentramos aquí en el estudio de las interacciones cuyo operador de evolución coincide con el libre en cualquier punto fuera del origen. Dicho de otra forma, la interacción tiene *soporte puntual*; también es aplicable la denominación *interacciones de contacto*. El ejemplo clásico es la correspondiente al “potencial” $V(x) = g\delta(x)$ pero, como vamos a ver, esta familia no agota las posibilidades: Las familias de operadores cumpliendo la condición de coincidir con $-\frac{d^2}{dx^2}$ para $x \neq 0$ incluyen más potenciales correspondiendo a otras distribuciones, e incluso admiten algunas deformaciones del término cinético.

4.1 Interacciones de contacto, teoría general

4.1.1 Cálculo por conservación de probabilidad

La manera más intuitiva de obtener todas las posibles interacciones de contacto es exigir conservación de la corriente de probabilidad durante la evolución temporal [13, 17]. A fin de cuentas, es esto lo que buscamos al exigir un hamiltoniano autoadjunto: que el operador de evolución sea unitario y por tanto conserve la probabilidad. Este tratamiento ha sido ejemplificado por Carreau [17], tanto para el pozo con paredes infinitamente altas como para los potenciales de contacto, obteniéndose en ambos casos una familia tetraparamétrica de condiciones de contorno, en coincidencia con la teoría de extensiones.

En el caso prototípico del pozo infinito, i.e. el operador libre definido en un intervalo (a, b) , las condiciones tradicionales de impenetrabilidad de la barrera, dadas por la anulación de la corriente de probabilidad, no cubren todas las extensiones posibles del operador. Las familias adicionales corresponden a fugas de probabilidad en los límites del potencial que se compensan exactamente unas con otras, de forma que el total se conserva. La interpretación física de la densidad de probabilidad nos da pie a rechazarlas en base a una localidad estricta. No ocurre así en el caso de potenciales de contacto, donde consideramos corrientes de probabilidad a derecha e izquierda de un mismo punto y todas las extensiones son pues compensaciones locales y por ende plausibles.

Para clasificar todas las posibles interacciones tomemos una descripción de las condiciones de contorno; por ejemplo la original de Carreau

$$\begin{pmatrix} -\Psi'(0-) \\ \Psi'(0+) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \Psi(0-) \\ \Psi(0+) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

La corriente de probabilidad es:

$$j(x) = \frac{1}{2i} \left(\Psi^* \frac{d\Psi}{dx} - \Psi \frac{d\Psi^*}{dx} \right) \quad (4.2)$$

y las autofunciones en el origen deben cumplir

$$\begin{aligned} 0 &= 2i(j(0^+) - j(0^-)) = \\ &= (\Psi^*(0^+)(M_{21}\Psi(0^-) + M_{22}\Psi(0^+)) - \Psi(0^+)(M_{21}^*\Psi^*(0^-) + M_{22}^*\Psi^*(0^+))) + \\ &\quad + (\Psi^*(0^-)(M_{11}\Psi(0^-) + M_{12}\Psi(0^+)) - (\Psi(0^-)(M_{11}^*\Psi^*(0^-) + M_{12}^*\Psi^*(0^+))) = \\ &= (M_{22} - M_{22}^*)\Psi(0^+)\Psi^*(0^+) + (-M_{21}^* + M_{12})\Psi(0^+)\Psi^*(0^-) + \\ &\quad + (-M_{21} + M_{12}^*)\Psi(0^-)\Psi^*(0^+) + (M_{11} - M_{11}^*)\Psi(0^-)\Psi^*(0^-) \end{aligned} \quad (4.3)$$

para cualquier autofunción Ψ del dominio.

De 4.3 obtenemos las restricciones para M : debe ser una matriz hermítica. Podemos parametrizarla con cuatro números reales $\rho, \alpha, \beta, \theta$, cada tupla correspondiendo entonces a una interacción dada.

$$M = \begin{pmatrix} \rho + \alpha & -\rho e^{i\theta} \\ -\rho e^{-i\theta} & \rho + \beta \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Notemos finalmente que no sólo la construcción de corrientes de probabilidad no exige conservación local de la misma, sino que incluso realmente no usa más datos que la topología (o conectividad) del espacio subyacente. Idealmente el método trabajaría igual en espacios ligeramente más complejos como los de la figura 4.3; en particular 4.2a y 4.2b no son distinguibles en este método.

Este hecho, unido a la coincidencia del resultado con el calculado usualmente por extensiones autoadjuntas (que se explica en el siguiente punto), permite la duda razonable acerca de si todas las extensiones obtenibles son físicamente válidas como potenciales en la recta, ya que las características de diferenciabilidad de ésta no son tenidas en cuenta. Se hace necesario algún método que haga énfasis en características adicionales del espacio sobre el que se define la ecuación, características como la diferenciabilidad o la métrica, y discutiremos esto con más detalle en la sección 4.5.

Carreau [17] utiliza ideas en esta línea para cuando construye las funciones de Green de las interacciones de contacto (en general, las interacciones en una línea con un agujero) y con ellas da una descripción en el sentido de integral funcional. En su formalismo aparece entonces, en los parámetros que controlan de la interacción entre las semirrectas, el dato de la “probabilidad de salto” de una a otra; en cierto modo se está dando una *distancia* que las separa:

← λ →

Además, se observa [17] que esta probabilidad corresponde al parámetro ρ de 4.4, lo que es una buena motivación para conservar esta notación. Cuando $\rho \rightarrow 0$ nos quedan dos semirrectas independientes, y cuando $\rho \rightarrow \infty$ con $\theta = 0$ veremos que se obtienen los potenciales $V(x) = \frac{\alpha+\beta}{2}\delta(x)$ usuales.

4.1.2 Cálculo por extensiones autoadjuntas

El tratamiento clásico de las interacciones de contacto se efectúa por medio de la teoría de extensiones autoadjuntas de operadores hermiticos: se toma un operador hermitico restringido a un dominio en el que no es autoadjunto, y se calcula que subespacio de funciones hay que añadir para que el dominio del adjunto coincida con éste.

El caso que nos ocupa fue estudiado por Seba [65] y por Holden, Albeverio et al.[32, 4]; se considera el operador correspondiente al hamiltoniano libre definido sobre $\mathbb{R} - \{0\}$ y se calculan sus extensiones autoadjuntas. Seguimos aquí el cálculo de Seba, cuyo análisis es más completo que el de Albeverio et al.

El operador a extender,

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} \Big|_{C_0^\infty(\mathbb{R}-\{0\})} \quad (4.5)$$

es simplemente la suma directa de los operadores libres en las semirrectas abiertas izquierda y derecha:

$$H_0 = H_{(-\infty,0)}^- \oplus H_{(0,+\infty)}^+ \quad (4.6)$$

(con dominios C_0^∞ en cada intervalo). Ambos términos tienen índices de deficiencia (1,1), como se conoce del análisis del problema radial [63]. Por tanto el operador total tendrá índices (2,2). Podemos parametrizar entonces las extensiones autoadjuntas de H_0 utilizando matrices unitarias 2×2 , por ejemplo haciendo corresponder a cada unitaria $U \equiv (u_{ij})$ la extensión autoadjunta H_U , con dominio

$$D(H_U) = \{f \in L^2(\mathbb{R}), f = \varphi + c_1(\varphi_1^+ + u_{11}\varphi_1^- + u_{12}\varphi_2^-) + c_2(\varphi_2^+ + u_{21}\varphi_1^- + u_{22}\varphi_2^-)\} \quad (4.7)$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $\varphi \in D(\bar{H}_0)$, y φ_i^\pm son bases de los espacios de deficiencia de H^\pm , tomemos por ejemplo:

$$\varphi_1^+(x) = \begin{cases} e^{ia|x|}, & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \varphi_2^+(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ e^{ia|x|} & x < 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\varphi_1^-(x) = \begin{cases} e^{-ia|x|}, & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \varphi_2^-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ e^{-ia|x|} & x < 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

(fijando $a = e^{i\pi/4}$).

Es conveniente caracterizar cada dominio usando las correspondientes condiciones de contorno en el origen; en la elección de Seba [65]

$$\begin{pmatrix} f'(0_+) \\ f'(0_-) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} f(0_+) \\ f(0_-) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

resulta

$$N = \frac{a}{1 + \text{tr}U + \det U} \begin{pmatrix} -(1 + u_{22} + iu_{11} + i \det U) & (1 - i)u_{21} \\ -(1 - i)u_{12} & 1 + u_{11} + iu_{22} + i \det U \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

de forma que la matriz de “derivación” puede ser parametrizada con los mismos coeficientes del método anterior

$$N = \begin{pmatrix} \rho + \beta & -\rho e^{-i\theta} \\ \rho e^{i\theta} & -\rho - \alpha \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Equivalentemente, podemos decir que la matriz M correspondiente a 4.1 es hermítica si y solo si corresponde a una extensión de Seba dada por una matriz U unitaria.

4.1.3 Cálculo en formulación integral

La forma habitual de presentar la interacción delta en los libros de texto es integrar la ecuación de Schrödinger una vez:

$$\Psi'(x) = \int^x (\lambda\delta(z) - E)\Psi(z)dz \quad (4.13)$$

con lo cual se obtiene la condición de contorno habitual en el origen, con salto en la derivada Ψ' .

Para obtener interacciones con salto en la autofunción, es necesario considerar la integral doble,

$$\Psi(x) = \int^x dy Z(y) \int^y dz (V(z) - E)\Psi(z) \quad (4.14)$$

que cuando $Z(y) = 1$ corresponde simplemente a integrar dos veces la ecuación de Schrödinger $(-\frac{d^2}{dx^2} + V)\Psi = E\Psi$.

Por ejemplo, la condición de contorno 4.35, la pseudo- $\delta^{(l)}$ de Holden-Albeverio, corresponde a la integral

$$\Psi(x) = \int^x dy (1 + \lambda\delta(y)) \int^y dz (-E)\Psi(z) \quad (4.15)$$

Si de aquí intentamos obtener una ecuación diferencial, obtenemos, derivando una vez

$$\Psi'(x) = (1 + \lambda\delta(x)) \int^x dz(-E)\Psi(z) \quad (4.16)$$

y una segunda derivación nos da

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \lambda\delta'(x) \int^x dz(-E)\Psi(z) + (1 + \lambda\delta(x))(-E)\Psi(x) \quad (4.17)$$

$$= \frac{\lambda\delta'(x)}{1 + \lambda\delta(x)}\Psi'(x) + (1 + \lambda\delta(x))(-E)\Psi(x) \quad (4.18)$$

esto es, visto de manera formal, la ecuación:

$$\left(\frac{1}{1 + \lambda\delta(x)} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\lambda\delta'(x)}{(1 + \lambda\delta(x))^2} \frac{d}{dx} \right) \Psi(x) = -E\Psi(x) \quad (4.19)$$

que aun regularizando las expresiones con deltas, contiene un potencial dependiente de la velocidad. Esta es la heurística mas simple para explicar los problemas que conlleva esta interacción.

Es interesante también retomar la derivación formal desde 4.16, y expresar la segunda derivación con la delta en el termino izquierdo:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{1 + \lambda\delta(x)} \frac{d}{dx} \Psi(x) = -E\Psi(x) \quad (4.20)$$

con lo cual vemos que efectivamente esta ecuación coincide fuera del origen con la de la ecuación de Schrödinger libre. Esta formulación es además fácilmente factorizable y, con la rigorización adecuada, se puede realizar el camino inverso y obtener las condiciones de contorno sin explicitar la ecuación integral doble.

4.1.4 Matriz de Scattering

Conociendo las autofunciones físicas de cada extensión, podemos leer de ellas la matriz S .

Para ello, recordemos que la solución física tiene la forma 1.5-1.7 asintóticamente. Como la solución fuera del origen viene dada simplemente por el operador libre, la condición asintótica es prolongable hasta el cero, y tenemos:

$$u_1(x) = \begin{matrix} e^{ikx} T^l & x > 0 \\ e^{ikx} + e^{-ikx} R^l & x < 0 \end{matrix} \quad (4.21)$$

$$u_2(x) = \begin{matrix} e^{-ikx} + e^{ikx} R^r & x > 0 \\ e^{-ikx} T^r & x < 0 \end{matrix} \quad (4.22)$$

$$u_2(x) = \begin{matrix} e^{-ikx} + e^{ikx} R^r & x > 0 \\ e^{-ikx} T^r & x < 0 \end{matrix} \quad (4.23)$$

$$e^{-ikx} T^r \quad x < 0 \quad (4.24)$$

Por otro lado, la caracterización del dominio de la extensión autoadjunta correspondiente viene dada por las unas condiciones de contorno en el origen, que en particular cumplirán estas autofunciones. Para unas condiciones de contorno dadas por ejemplo con los parámetros de 4.1 podemos despejar el sistema de ecuaciones y obtenemos para la matriz S la siguiente expresión general:

$$S_k = - \begin{pmatrix} \frac{2e^{-i\theta} ik\rho}{\alpha\beta - i\alpha k - i\beta k - k^2 + \alpha\rho + \beta\rho - 2ik\rho} & \frac{\alpha\beta + i\alpha k - i\beta k + k^2 + \alpha\rho + \beta\rho}{\alpha\beta - i\alpha k - i\beta k - k^2 + \alpha\rho + \beta\rho - 2ik\rho} \\ \frac{\alpha\beta - i\alpha k + i\beta k + k^2 + \alpha\rho + \beta\rho}{\alpha\beta - i\alpha k - i\beta k - k^2 + \alpha\rho + \beta\rho - 2ik\rho} & \frac{2e^{i\theta} ik\rho}{\alpha\beta - i\alpha k - i\beta k - k^2 + \alpha\rho + \beta\rho - 2ik\rho} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Hay que tener en cuenta que en esta parametrización se admite la posibilidad $\rho \rightarrow \infty$, que de hecho es la que recobra las matrices S con propiedades asintóticas no excepcionales. Observemos además que el parámetro θ controla la inversión temporal, así que si queremos conservar esta simetría hay que fijarlo a cero.

Notemos además que esta expresión se puede utilizar para ejecutar una prueba “a fuerza bruta” de que, para interacciones libres fuera del origen, la matriz S es unitaria si y solamente si la matriz M dando las condiciones de contorno 4.1 en el origen es hermítica.

4.1.5 Subfamilias relevantes

Llegados a este nivel es conveniente centrar nuestro análisis presentando varias subfamilias o grupos de subfamilias de interacciones que utilizaremos como ejemplos relevantes en lo sucesivo.

Separación

Ciertas extensiones corresponden a problemas sobre dos semirrectas totalmente separadas. Seba [65] las caracteriza en su parametrización como las asociadas a matrices U diagonales. En efecto, vemos que si $u_{12} = u_{21} = 0$ entonces

$$\rho = 0, \quad \alpha = \frac{1 + u_{11} + i(u_{22} + u_{11}u_{22})}{1 + u_{22} + (u_{11} + u_{11}u_{22})} \quad (4.26)$$

$$\beta = -\frac{1 + u_{22} + i(u_{11} + u_{11}u_{22})}{1 + u_{22} + (u_{11} + u_{11}u_{22})} \quad (4.27)$$

y la matriz de scattering asociada

$$S_k = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha\beta + i\alpha k - i\beta k + k^2}{\alpha\beta - i\alpha k - i\beta k - k^2} \\ \frac{\alpha\beta - i\alpha k + i\beta k + k^2}{\alpha\beta - i\alpha k - i\beta k - k^2} & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta + ik}{\beta - ik} \\ \frac{\alpha + ik}{\alpha - ik} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

tiene coeficientes de transmision nulos. Los de reflexión vienen gobernados independientemente por α, β en la respectiva semirrecta.

Familia triparamétrica de Seba

Si la matriz U que parametrizaba las interacciones no es diagonal, físicamente tenemos conexión entre un lado y otro de la recta.

Entonces podemos describir las soluciones con interacción como aquellas con condiciones de contorno vinculando 0^+ y 0^- :

$$\begin{pmatrix} \Psi(0^+) \\ \Psi'(0^+) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} C & D \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi(0^-) \\ \Psi'(0^-) \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

(con $AC - BD = 1$).

Usando funciones de Green, Seba calcula [65] que la imposición adicional $A+C = -2$ corresponde a una familia triparamétrica de «pseudopotenciales de Fermi» en el origen

$$-B\delta + (1 + C)(\delta' - \delta \frac{d}{dx}) - \delta\delta' \frac{d}{dx} \tag{4.30}$$

que corresponde a parámetros

$$\theta = 0, \rho = -\frac{1}{D}, \beta = -\alpha = \frac{A+1}{D} \tag{4.31}$$

Triparamétrica δ^2 -pseud de Chernoff

Chernoff y Hughes [19] nos aportan otra subfamilia, dada por las condiciones de contorno

$$\begin{pmatrix} \Psi(0^+) \\ \Psi'(0^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 \\ r(e^{\bar{z}} - e^{-z}) & e^{\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi(0^-) \\ \Psi'(0^-) \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

(con $z \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}$), que hacen corresponder formalmente a pseudopotenciales conteniendo δ^2 , y que regularizan con una serie de potenciales de corto alcance, posiblemente no locales (aunque no demasiado problemáticos: veremos que el coeficiente que aquí se ha dejado a cero es precisamente la fuente de la mayoría de las complicaciones).

La interacción no es esencialmente distinta de los ejemplos conteniendo formalmente δ' , etc. De hecho, si admitimos funciones test discontinuas, los dos tipos de singularidad son en cierto modo equivalentes, como intuimos de la integración formal por partes:

$$\langle \delta' | H(x) \rangle = \int \delta' H = - \int \delta \delta = - \langle \delta^2 | 1 \rangle \tag{4.33}$$

En nuestro trabajo intentaremos mantener todas las expresiones formales utilizando sólo δ y δ' .

Delta de Dirac y pseudodelta prima de Holden

De las familias anteriores entresacamos dos condiciones de contorno interesantes por su sencillez:

$$\Psi(0^+) - \Psi(0^-) = 0 \quad \Psi'(0^+) - \Psi'(0^-) = A\Psi(0) \quad \text{Dirac-}\delta \quad (4.34)$$

$$\Psi'(0^+) - \Psi'(0^-) = 0 \quad \Psi(0^+) - \Psi(0^-) = B\Psi'(0) \quad \text{Holden-}\delta^{(\prime)} \quad (4.35)$$

Estas dos condiciones son en cierto modo duales una de otra [13], de una manera que recuerda el clásico ejemplo [63, X.3.Ex3] de factorización

Sea A un operador cerrado densamente definido, y

$$D(A^+A) = \{\Psi \in D(A) \mid A\Psi \in D(A^+)\} \quad (4.36)$$

A^+A con este dominio es autoadjunto.

Tomemos $A = id/dx$ con dominio $D(A) = \{\Psi \mid \Psi(0) = \Psi(1) = 0\}$.

Entonces

$$D(A^+A) = \{\Psi \mid \Psi(0) = \Psi(1) = 0\} \quad (4.37)$$

$$D(AA^+) = \{\Psi \mid \Psi'(0) = \Psi'(1) = 0\} \quad (4.38)$$

De hecho cuando $A, B \rightarrow \infty$ en 4.34 y 4.35 aparece precisamente este ejemplo.

Las matrices de scattering correspondientes son

$$S_k^\delta = S_k(\rho \rightarrow \infty, \theta = 0) = - \begin{pmatrix} \frac{2ik}{\alpha+\beta-2ik} & \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-2ik} \\ \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-2ik} & \frac{2ik}{\alpha+\beta-2ik} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

$$S_k^{(\delta')} = S_k(\theta = 0 = \alpha = \beta) = - \begin{pmatrix} \frac{2i\rho}{-k-2i\rho} & \frac{k}{-k-2i\rho} \\ \frac{k}{-k-2i\rho} & \frac{2i\rho}{-k-2i\rho} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Esto es, los coeficientes de transmisión y reflexión se intercambian entre las dos interacciones.

Invariantes de escala, delta prima de Kurasov

Imponiendo las ligaduras

$$\alpha = \mu \sin \phi, \beta = \mu \cos \phi, \rho = \mu \frac{-\sin \phi \cos \phi}{\sin \phi + \cos \phi} \quad (4.41)$$

y tendiendo $\mu \rightarrow \infty$ la matriz S_k se queda independiente de k y la interacción es por tanto invariante de escala; en concreto

$$S_k = - \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \sin 2\phi & -\cos 2\phi \\ \cos 2\phi & e^{i\theta} \sin 2\phi \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Si además $\theta = 0$, tenemos un círculo de interacciones con simetría de inversión temporal, dadas por las condiciones de contorno correspondientes a la δ' de Kurasov [43]:

$$\Psi'(0^-) = \lambda\Psi'(0^+), \lambda\Psi(0^-) = \Psi(0^+) \quad (4.43)$$

Este comportamiento es el que esperamos intuitivamente de la δ' en una dimensión, ya que ésta tiene dimensiones de x^{-2} , igual que el término cinético, y por tanto debemos esperar invarianza de escala al menos ingenuamente (potenciales singulares tal invarianza está rota, véase [38])

4.2 El problema de regularización

Para la interacción delta, existe una forma más clásica de derivar la solución; usar potenciales regularizadores. La pregunta es si para el resto de interacciones existen igualmente tales familias de potenciales aproximándolas.

Los primeros problemas en este sentido fueron apuntados por Seba en forma de resultados negativos [66]. Un intento de regularización, sin pretender cumplir todas las condiciones exigibles a un hamiltoniano, fue propuesto por Carreau [16] y se han apuntado otras posibles familias [19] todas ellas sugiriendo bien potenciales no locales, bien cuanto menos potenciales dependientes de la velocidad y con algún coeficiente complejo.

Desde un punto de vista físico, podemos ver varias fuentes de problemas. Ya hemos comentado la ausencia de consideraciones de suavidad en el tratamiento por extensiones. Podemos esperar también la aparición de autofunciones con discontinuidades, con los consiguientes problemas al actuar sobre ellas con operadores diferenciales, e incluso dificultades en la ecuación integral, al intentar plantearnos distribuciones actuando sobre funciones discontinuas. Por último, no debemos olvidar que las posibles extensiones incluyen algunas sin simetría temporal, dando origen a la necesidad de potenciales no puramente reales.

En lo que resta de este capítulo y en parte del siguiente iremos viendo los varios argumentos que hemos desarrollado para aclarar el problema.

4.2.1 Discusión de Seba

Los resultados más completos sobre regularizaciones de estos potenciales provienen del análisis de Seba de la convergencia (en el sentido de la norma del resolvente, esto es, tomando el *Strong Resolvent Limit* [63]) de series de operadores de Schrödinger.

Su primer resultado nos habla de las limitaciones de la regularización con dipolos (doble delta) [66]:

Sea la familia de operadores

$$H_\epsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\lambda}{\epsilon^\alpha}(\delta(x - \epsilon) - \delta(x + \epsilon)) \quad (4.44)$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} S.R. \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon &= H_0 \text{ para } \alpha < 1/2 \\ S.R. \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon &= H_A \text{ con } A = -2\lambda^2, \text{ para } \alpha = 1/2 \\ S.R. \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon &= H_D \text{ para } \alpha > 1/2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde H_0, H_A, H_D son respectivamente los hamiltonianos de la interacción libre, del potencial delta de acoplo A y del hamiltoniano libre con condiciones de Dirichlet en el origen.

Por tanto, una regularización que en funciones generalizadas nos da la delta prima, aquí se limita a regularizar la delta, y las variantes más sencillas se limitan bien a separar totalmente, bien a anular la interacción.

Otro teorema más fuerte (ver también 5.4.3) nos dice que lo mismo ocurre si regularizamos escalando cualquier potencial $V(x)$ con integral cero, siempre que éste sea lo suficientemente regular:

Sea $V(x) \in C_0^\infty(R)$, cumpliendo

$$\int_R V(x)dx = 0 \quad (4.46)$$

entonces la familia de operadores de Schrödinger

$$H_\epsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\epsilon^\alpha}V(x/\epsilon), \epsilon > 0, \alpha > 0 \quad (4.47)$$

satisface

$$\begin{aligned} S.R. \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon &= H_0 \text{ para } \alpha < 3/2 \\ S.R. \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon &= H_A, (A = \frac{1}{2} \int_R \int_R V(x)|x - y|V(y)dx dy), \text{ para } \alpha = 3/2 \\ S.R. \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon &= H_D \text{ para } \alpha > 3/2 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Uniendo esto al hecho de que las series con potenciales de integral distinta de cero pero acotada regularizan deltas, nos encontramos con un bloqueo serio a la regularización del resto de las interacciones.

Figura 4.1: Aproximación lineal en una regularización con dos deltas

En el caso de regularización con dos deltas (dipolo), el resultado de Seba puede obtenerse de una forma menos rigurosa aproximando linealmente la función de ondas (ver figura 4.1), cerca de los puntos de interacción. Podemos entonces aplicar la solución conocida para la delta y derivar condiciones de contorno a derecha e izquierda de la interacción.

Tomemos para ello la autofunción inmediatamente a la izquierda de la interacción, en $-\frac{\epsilon^-}{2}$, con valores ψ_-, ψ'_- . Inmediatamente a la derecha de este punto habrá cambiado la derivada y tendremos

$$\psi(-\frac{\epsilon^+}{2}) = \psi_-, \psi'(-\frac{\epsilon^+}{2}) = \psi'_- + \frac{c}{\epsilon^\alpha} \psi_- \quad (4.49)$$

ahora prolongando hasta el punto $\frac{\epsilon^-}{2}$

$$\psi(\frac{\epsilon^-}{2}) = \psi_- + \epsilon(\psi'_- + \frac{c}{\epsilon^\alpha} \psi_-), \psi'(\frac{\epsilon^-}{2}) = \psi'_- + \frac{c}{\epsilon^\alpha} \psi_- \quad (4.50)$$

y pasando la segunda delta tenemos a la derecha de la interacción:

$$\psi_+ = \psi_-(1 + \frac{c}{\epsilon^{\alpha-1}}) + \epsilon\psi'_-, \psi'_+ = \psi'_-(1 - \frac{c}{\epsilon^{\alpha-1}}) - \psi_- \frac{c^2}{\epsilon^{2\alpha-1}} \quad (4.51)$$

Así que el límite $\epsilon \rightarrow 0$ depende de α de una forma similar a los resultados anteriores: si $\alpha < 1/2$ el matching es el de ausencia de interacción; para $\alpha = 1/2$ tenemos exactamente las condiciones de delta de Dirac, y para valores superiores debemos imponer condiciones de anulación si queremos conservar las relaciones.

4.2.2 Regularización de Carreau

Carreau [16] propone una serie de pseudopotenciales I^ϵ

$$H^\epsilon = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + I^\epsilon \quad (4.52)$$

que presentan una dependencia de la velocidad:

$$I^\epsilon = \begin{cases} K^\epsilon(\rho e^{i\theta}) \left(\frac{d}{dx} + \alpha + \rho - \rho e^{i\theta} \right) & -\epsilon < x < 0 \\ -K^\epsilon(\rho e^{-i\theta}) \left(\frac{d}{dx} + \beta + \rho - \rho e^{-i\theta} \right) & 0 < x < \epsilon \\ 0 & \text{en cualquier otro punto} \end{cases} \quad (4.53)$$

Y una variación de la cte de acoplo dada por la ecuación trascendente

$$K^\epsilon(\eta) e^{2K^\epsilon(\eta)\epsilon} = \eta \quad (4.54)$$

la cual para ϵ pequeño se puede aproximar

$$K^\epsilon(\eta) = \frac{1}{2\epsilon} \{-\ln(2\eta\epsilon) + \ln(-\ln 2\eta\epsilon) + \ln(\dots)\} \quad (4.55)$$

Obsérvese que el término dependiente de la velocidad actúa sólo en la misma parte de la recta que los términos que construyen el pozo. Además la falta de inversión temporal se introduce admitiendo coeficientes complejos.

La ventaja de esta familia reside en que al comparar las autofunciones correspondientes en $\pm\epsilon$ obtenemos una relación independiente de ϵ :

$$\begin{pmatrix} -\Psi'(-\epsilon) \\ \Psi'(+\epsilon) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \Psi(-\epsilon) \\ \Psi(+\epsilon) \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

controlada por la misma M de 4.4, y por tanto el límite nos da las condiciones de contorno buscadas.

Esto se refleja también en la matriz de scattering asociada, S_k^ϵ , que es un simple desfase de la de la interacción puntual correspondiente,

$$S_k^\epsilon = -e^{-2i\epsilon k} S_k, \quad (4.57)$$

propiedad ésta que hace simple el trabajar con transformaciones de escala en esta regularización, pues acaba cayendo de forma trivial hacia la interacción buscada (Volveremos sobre esta cuestión en el siguiente capítulo)

Lamentablemente la serie no se construye con operadores hermíticos, quedando pues en duda si es aceptable (ver comentarios en [16]).

Notemos por último que la interacción $\delta^{(\prime)}$ tiene una forma sencilla en esta regularización:

$$I^\epsilon = \begin{cases} K^\epsilon(\rho) \frac{d}{dx} & -\epsilon < x < 0 \\ -K^\epsilon(\rho) \frac{d}{dx} & 0 < x < \epsilon \\ 0 & \text{en cualquier otro punto} \end{cases} \quad (4.58)$$

Figura 4.2: Dos espacios topológicamente indistinguidos
 La mera conservación de probabilidad no da información más allá de conectividad

4.2.3 Regularización en otros espacios

Un punto interesante de las técnicas de extensiones es que no damos ninguna información acerca de la diferenciabilidad del espacio subyacente. Como hemos comentado, la técnica usada es incapaz de distinguir entre los dos espacios de la figura 4.2

Esto es, hemos renunciado a características más allá de la mera estructura topológica. De hecho nos podemos plantear si de cara a la regularización del problema no podemos incluso renunciar a la caracterización topológica, y trabajar sobre espacios que luego sean proyectados a la recta.

La opción más elemental, que desarrollaremos en las secciones siguientes, es utilizar directamente un espacio $R - \{0\}$, ie

$o^- \quad o^+$

Ahora bien, una vez hemos decidido no trabajar en la línea, no hay nada que nos impida usar estructuras espaciales mas complicadas, como las que dibujamos en la figura 4.3. En particular el espacio 4.3(a) nos permitiría representar una función analítica fuera del origen como una combinación de dos, una analítica en la recta y otra en la semirrecta.

También serían aceptables espacios más complicados. Por ejemplo el representado en 4.3(b), que nos daría una matriz de scattering 3×3 en el formalismo de matriz S , pero que en la forma habitual sólo podemos trabajar pegando tres semirrectas forzando la conservación de probabilidad.

En cualquier caso, la forma más general de resolver estos problemas es presentar una formulación intrínseca en el álgebra de funciones sobre estos espacios y ejecutar identificaciones mediante la representación algebraica de los grupoides de equivalencia [22, 48] correspondientes. Todo este desarrollo va con mucho fuera del alcance de la presente memoria. No obstante, las técnicas métricas correspondientes son interesantes de por sí y presentamos alguna caracterización de ello en la sección 4.5.

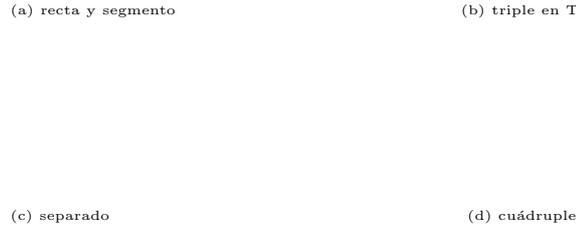


Figura 4.3: Algunos otros espacios 1D

4.3 Potenciales incluyendo funciones generalizadas

4.3.1 Generalización del método de Griffiths

Cuando incorporamos una función generalizada al potencial de un hamiltoniano es posible, si asumimos la existencia de una regularización de la distribución, manipular la ecuación de Schrödinger para obtener unas condiciones de contorno en el punto donde la distribución concentra su peso. Griffiths [37] aplica esta idea suponiendo que la interacción delta es regularizada por una serie par de funciones, obteniéndose así una serie de condiciones de contorno correspondientes a las sucesivas derivadas.

Pare generalizar el procedimiento, tomemos una distribución cualquiera $< \rho |$, que supondremos regularizable por una serie de funciones V_λ cuyo soporte tiende a cero al hacer $\lambda \rightarrow \infty$.

Integrando desde $-\epsilon < 0$ a $x > 0$ tenemos

$$-\Psi'_\lambda(x) + \Psi'_\lambda(-\epsilon) + \int_{-\epsilon}^x V_\lambda(y) \Psi_\lambda(y) dy = E_\lambda \int_{-\epsilon}^x \Psi_\lambda(y) dy \quad (4.59)$$

De igual forma, integrando dos veces,

$$x \int_{-\epsilon}^x V_\lambda(z) \Psi_\lambda(z) dz - \int_{-\epsilon}^x V_\lambda(z) z \Psi_\lambda(z) dz - \Psi_\lambda(x) + \Psi_\lambda(-\epsilon) + (x+\epsilon) \Psi'_\lambda(-\epsilon) = E \int \int \Psi_\lambda dz \quad (4.60)$$

4.3. POTENCIALES INCLUYENDO FUNCIONES GENERALIZADAS 97

Ahora tomamos $x = +\epsilon$ y estudiamos los límites $\lambda \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0^+$. Así

$$\langle \rho | \Psi \rangle - \Psi'(+\epsilon) + \Psi'(-\epsilon) = E \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \Psi(y) dy \quad (4.61)$$

$$\epsilon \langle \rho | \Psi \rangle - \langle \rho | z \Psi(z) \rangle - \Psi(\epsilon) + \Psi(-\epsilon) + 2\epsilon \Psi'(-\epsilon) = E \int \int \Psi \quad (4.62)$$

Las integrales en Ψ son continuas y se tratan desarrollando la autofunción para ϵ pequeño, alrededor de 0^\pm , con lo que desaparecen en el límite. Obtenemos las siguientes ecuaciones, como condiciones de contorno para las autofunciones:

$$\Psi'(0^+) - \Psi'(0^-) = \langle \rho | \Psi \rangle \quad (4.63)$$

$$\Psi(0^+) - \Psi(0^-) = - \langle \rho | z \Psi(z) \rangle \quad (4.64)$$

Obviamente si ρ es la distribución de Dirac, el resultado es el esperado. Para cualquier hipotética distribución sobre $C^\infty(R)$, la ecuación 4.64 es redundante, pues nos da simplemente la condición de continuidad. Así pues, si queremos que estas manipulaciones tengan algún significado, hay que extender el conjunto de distribuciones.

4.3.2 Posibilidad de distribuciones sobre funciones test discontinuas

Una regularización dividiendo el punto

Es obvio que el planteamiento de la teoría de extensiones autoadjuntas, al eliminar un punto de la recta, ha ampliado el conjunto de funciones continuas sobre el espacio en el que trabajamos. Debemos sospechar de ello que una formulación simbólica de todas las interacciones obtenidas necesitará admitir incluso distribuciones sobre funciones discontinuas en el origen.

Como motivación, veamos como un *splitting* del punto permite reconstruir las interacciones buscadas; esta técnica es bastante sugerente si recordamos que el problema de una delta prima actuando sobre una función escalón es equivalente a nivel simbólico al de una delta actuando sobre una delta, un problema de producto de distribuciones.

Dado un potencial

$$V = \lambda \delta(x) + \mu \delta'(x) \quad (4.65)$$

planteamos la regularización

$$V = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_+ \delta(x - \epsilon) + \lambda_- \delta(x + \epsilon) + \mu_+ \delta'(x - \epsilon) + \mu_- \delta'(x + \epsilon) \quad (4.66)$$

Realizando la integración de la ecuación de Schrödinger entre los límites $-\epsilon - \Lambda$ y $+\epsilon + \Lambda$, con $\Lambda \rightarrow 0^+$, obtenemos

$$\Psi'_\epsilon(\epsilon) - \Psi'_\epsilon(-\epsilon) + F(\epsilon) = \lambda_+ \Psi(+\epsilon) + \lambda_- \Psi(-\epsilon) + \mu_+ \Psi'(+\epsilon) + \mu_- \Psi'(-\epsilon) \quad (4.67)$$

$$\Psi(\epsilon) + \Psi(-\epsilon) + G(\epsilon) = 2\epsilon\lambda_- \Psi(-\epsilon) - 2\epsilon\mu_- \Psi'(-\epsilon) + \mu_+ \Psi(\epsilon) + \mu_- \Psi(-\epsilon) \quad (4.68)$$

Donde $F \equiv \int \Psi$ y $G \equiv \int \int \Psi$ tienden a cero con ϵ . Así que en este límite obtenemos una familia de condiciones de contorno en el origen:

$$\Psi'(0^+) - \Psi'(0^-) = \lambda_+ \Psi(0^+) + \lambda_- \Psi(0^-) + \mu_+ \Psi'(0^+) + \mu_- \Psi'(0^-) \quad (4.69)$$

$$\Psi(0^+) + \Psi(0^-) = +\mu_+ \Psi(0^+) + \mu_- \Psi(0^-) \quad (4.70)$$

La consistencia del esquema invita a pensar en distribuciones a derecha y a izquierda, por tanto capaces de actuar sobre funciones con discontinuidad en el origen.

4.3.3 Rigorización de Kurasov

Heurísticamente, a partir de manipulaciones como la anterior, podemos esperar ciertas propiedades de estas distribuciones; por ejemplo que en el caso contínuo se reduzcan a las conocidas puntuales, esto es a la delta y sus derivadas, o que se conserve la validez de la derivada en distribuciones. Quizás es este el punto más interesante, lo que obligará que la derivada de la distribución $\langle 1 |$ sea una distribución $\langle 1 |$ distinta de la cero, aunque naturalmente se anulará sobre funciones continuas.

Kurasov [42] propone una rigorización de esta teoría de distribuciones y utiliza las funciones generalizadas así definidas para representar los hamiltonianos correspondientes a interacciones puntuales. Cada uno de estos hamiltonianos se considera como un operador en el espacio de distribuciones, y se restringen dominio y rango a distribuciones que se puedan describir con una función de L^2 . Para cada hamiltoniano, el dominio máximo cumpliendo esta restricción coincide siempre con el de un operador autoadjunto de los obtenidos por extensiones.

Las pruebas de Kurasov comparan directamente con la teoría de extensiones autoadjuntas sin asumir la existencia de regularizaciones a la hora de conectar con la teoría habitual y limitándose a chequear la coincidencia de los dominios. Resumiremos brevemente este resultado y veremos como se puede utilizar de forma ingenua la ecuación de Schrödinger para conectar las distribuciones de Kurasov con soluciones de ésta.

La rigorización toma como conjunto de funciones

$$K = C_1^\infty((-\infty, 0]) \cup C_1^\infty([0, +\infty)) \quad (4.71)$$

4.3. POTENCIALES INCLUYENDO FUNCIONES GENERALIZADAS 99

Una serie $\{\varphi_n\}$ de funciones ($\in K$) converge a $\varphi \in K$ si y solo si existe un intervalo las que toda φ_n es cero fuera de éste y la serie converge uniformemente en todo punto del intervalo distinto del origen.

Una distribución $f \in K'$ es una forma lineal sobre K tal que para cada compacto $X \subset R$ existen constantes C, n acotando f:

$$|f(\varphi)| \leq C \sum_{\alpha \leq n} \sup_{x \neq 0} \left| \left(\frac{d}{dx} \right)^\alpha \varphi \right|, \varphi \in K, \text{supp}(\varphi) \in X \quad (4.72)$$

Las técnicas usuales de distribuciones son de aplicación aquí.

- La singularidad básica de estas distribuciones es efectivamente que la derivada como función y como distribución dejan de coincidir, y como esperabamos la derivada de la distribución área no es ya la distribución nula, sino que:

$$\langle 1'|f \rangle = f(+0) - f(-0) \quad (4.73)$$

- Si la distribución proviene de una función, es posible definir su producto por la delta

$$\langle \psi \delta | = \langle \delta | \psi \rangle + \frac{\langle 1' | \psi \rangle}{4} \langle 1' | \quad (4.74)$$

- En general, la actuación de la derivada sobre una distribución que provenga de una función ψ es

$$\langle D_x \psi | = \left\langle \frac{d}{dx} \psi \right| + \langle 1' | \psi \rangle + \langle \delta | + \langle \delta | \psi \rangle \langle 1' | \quad (4.75)$$

(esto es, solo hay coincidencia para funciones continuas que se anulen en el origen)

El hecho de que esta distribución $\langle 1' |$ se anule sobre las funciones continuas resulta problemático a la hora de extender las distribuciones usuales en \mathbb{R} , pues quedan interminadas en un término $c \langle 1' |$. En el caso de la δ y sus derivadas, fijamos exigiendo que la delta sea la regularizada con funciones pares,

$$\delta(\varphi) = \frac{\varphi(0+) + \varphi(0-)}{2} \quad (4.76)$$

de forma que las propiedades bajo inversión y escalado coinciden con las de la delta usual.

Con estos conceptos, el principal resultado anunciado por Kurasov es la coincidencia entre los dominios definidos por extensiones autoadjuntas del operador 4.5 y los de los operadores diferenciales de segundo orden que incluyen distribuciones sobre $\mathbb{R}^+ \oplus \mathbb{R}^-$:

Dado un operador diferencial del tipo:

$$L_X = -D_x^2(1+X_4\delta) + iD_x(2X_3\delta - iX_4\delta^{(1)}) + X_1\delta + (X_2 - iX_3)\delta^{(1)} \quad (4.77)$$

Su dominio cumple las siguientes condiciones de contorno, dependiendo de los valores de $\{X_n\}$:

1.

$$\begin{pmatrix} \psi(+0) \\ \frac{d}{dx}\psi(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(2+X_2)^2 - X_1X_4 + X_3^2}{(2-iX_3)^2 + X_1X_4 - X_2^2} & \frac{-4X_4}{(2-iX_3)^2 + X_1X_4 - X_2^2} \\ \frac{4X_1}{(2-iX_3)^2 + X_1X_4 - X_2^2} & \frac{(2-X_2)^2 - X_1X_4 + X_3^2}{(2-iX_3)^2 + X_1X_4 - X_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(-0) \\ \frac{d}{dx}\psi(-0) \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

$$\text{si } (2 - iX_3)^2 + X_1X_4 - X_2^2 = 0$$

2.

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}\psi(+0) \\ \frac{d}{dx}\psi(-0) \end{pmatrix} = \frac{1}{X_4} \begin{pmatrix} X_2 - 2 & 0 \\ 0 & X_2 + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(+0) \\ \psi(-0) \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

$$\text{si } 4 + X_1X_4 - X_2^2 = 0, X_3 = 0, X_4 \neq 0$$

3.

$$\frac{d}{dx}\Psi(+0) = \frac{X_1}{4}\Psi(+0) \quad \Psi(0-) = 0 \quad (4.80)$$

$$\text{si } X_2 = 2, X_3 = 0, X_4 = 0$$

4.

$$\psi(+0) \quad \frac{d}{dx}\psi(-0) = -X_1/4\psi(-0) \quad (4.81)$$

$$\text{sii } X_2 = -2, X_3 = 0, X_4 = 0$$

4.3.4 Aplicación de las ecuaciones de Griffiths generalizadas

Las ecuaciones de Griffiths, que han sido obtenidas de manera puramente formal, dan una argumentación —por no decir prueba— más directa de las proposiciones de Kurasov, simplemente aplicando 4.63 y 4.64 a estas distribuciones.

Por ejemplo una interacción con la delta y su derivada:

$$-D_x^2 + A\delta + B\delta' \quad (4.82)$$

corresponde según el lema de Kurasov a las condiciones:

4.3. POTENCIALES INCLUYENDO FUNCIONES GENERALIZADAS 101

$$\begin{pmatrix} \psi(0^+) \\ \frac{d}{dx}\psi(0^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+B}{2-B} & 0 \\ \frac{4A}{4-B^2} & \frac{2-B}{2+B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(0^-) \\ \frac{d}{dx}\psi(0^-) \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

y aplicando la generalización de las eq. de Gr. a las diferencias:

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{A}{2}(\psi(0^+) + \psi(0^-)) - \frac{B}{2}(\psi'(0^+) + \psi'(0^-)) \quad (4.84)$$

$$\psi(0^+) - \psi(0^-) = \frac{B}{2}(\psi'(0^+) + \psi'(0^-)) \quad (4.85)$$

vemos que ambos pares de condiciones son equivalentes.

Incidentalmente, la familia de Chernoff corresponde a parámetros complejos en las expresiones anteriores.

No obstante, no debemos esperar que todas las interacciones puedan ser obtenidas con este mecanismo, ya que hemos asumido la forma usual de un hamiltoniano con un término cinético más un término potencial $V(x)$. Un operador con alteraciones en el término cinético (o simplemente con potenciales dependiendo de la velocidad) no tiene esta forma, y por tanto no debemos esperar que sea representable ingenuamente a la Griffiths.

Por ejemplo, tomemos nuevamente la delta de Holden-Albeverio, $\delta^{(l)}$. Sus condiciones de contorno, 4.35, deberían corresponder a una distribución con ecuaciones:

$$0 = \langle \rho | \Psi \rangle \quad (4.86)$$

$$F\psi'(0^\pm) = -\langle \rho | z\Psi(z) \rangle \quad (4.87)$$

y no encontramos una distribución $\langle \rho |$ que sea solución de éstas.

Incidentalmente, comentemos que Kurasov llama a esta interacción “el operador con densidad singular”, y la construye con con el “hamiltoniano”

$$H_K = -D_x(1 - F\delta)D_x \quad (4.88)$$

que concuerda con nuestra expresión 4.20 en un marco que fuerce la substracción $\delta^2 = 0$ ¹, ya que entonces el termino en el interior de 4.88 es el inverso del de la ecuación integral. Comparése también con la expresión formal de Seba [66]

$$H_S = -D_x^2 + \lambda|\delta' \rangle \langle \delta'| \quad (4.90)$$

con un λ renormalizado (ver sección 5.4.4).

¹Tal marco parece existir en la teoría de Kurasov, como él mismo nos apuntó en la siguiente sugerencia: Tomemos la δ' operando sobre la función de Heaviside, $H(x)$. Desarrollando de dos formas distintas podemos construir la siguiente cadena de “igualdades”:

$$-\langle \delta^2 | 1 \rangle = -\langle \delta | \delta \rangle = -\langle \delta | H' \rangle = \langle D_x \delta | H(x) \rangle = -\langle \delta | (dH/dx) \rangle = -\langle \delta | 0 \rangle = 0 \quad (4.89)$$

(donde dH/dx se ejecuta sólo fuera del origen)

4.4 Supersimetrías de las interacciones puntuales

Ya vimos en la sección 2.2.1 como el operador δ podía construirse con un par supersimétrico. Veamos ahora si podemos utilizar la misma técnica para las otras interacciones obtenidas, y que significación tiene el haber eliminado el punto del origen a la hora de comenzar los cálculos.

Para ello, partimos del operador general

$$A = Z(x)\frac{d}{dx} + W(x) \quad (4.91)$$

Su adjunto tendrá la forma

$$A^+ = -\frac{d}{dx}Z^*(x) + W^*(x) \quad (4.92)$$

y la composición de ambos nos da

$$A^+A = -\frac{d}{dx}|Z(x)|^2\frac{d}{dx} + (W^*Z - Z^*W)\frac{d}{dx} - \frac{d(Z^*W)}{dx} + |W|^2 \quad (4.93)$$

$$AA^+ = -Z^*(x)\frac{d^2}{dx^2}Z(x) - \frac{d}{dx}Z^*W + W^*Z\frac{d}{dx} + |W|^2 \quad (4.94)$$

En cualquier caso, los operadores obtenidos serán hamiltonianos autoadjuntos en el dominio adecuado, con sólo pedir que A sea cerrado.

Buscamos que el operador A^+A tenga la misma forma que el libre. Basta con exigir $|Z| = 1$ para obtener una clase de teorías que contienen un término cinético libre. Ahora, el haber eliminado Z, W sobre el origen nos permite anular el término $\frac{d(Z^*W)}{dx}$ simplemente utilizando funciones escalón para Z, W . El término dependiendo de velocidades se anula si $\Im W^*Z = 0$. Finalmente, el coeficiente $|W|^2$ debe ser también constante. Resumiendo, podemos parametrizar Z, W con cuatro coeficientes reales

$$Z(x) = \begin{cases} x > 0, & e^{i\theta_+} \\ x < 0, & e^{i\theta_-} \end{cases} \quad (4.95)$$

$$W(x) = \begin{cases} x > 0, & \mu_+ e^{i\theta_+} \\ x < 0, & \mu_- e^{i\theta_-} \end{cases} \quad (4.96)$$

con la ligadura $|\mu_+| = |\mu_-| \equiv \mu$, y todos estos operadores tienen como expresión formal el libre.

Incorporemos ahora los dominios de actuación para los operadores. En general, $D(A)$ será el resultado de restringir funciones $AC(\mathbb{R} - \{0\})$ en

4.4. SUPERSIMETRIAS DE LAS INTERACCIONES PUNTUALES 103

L^2 a cumplir alguna condición de contorno en el origen. Tenemos toda la libertad que queramos a la hora de imponer condiciones, siempre y cuando A siga siendo un operador cerrado densamente definido en L^2 .

La sencillez de los operadores nos permite aun calcular el dominio del adjunto simplemente exigiendo la definición, $\langle A^+\phi|\Psi \rangle = \langle \phi|A\Psi \rangle$,

$$0 = \int ((-Z(x)\phi^*(x))'\Psi(x) - \phi^*(x)Z(x)\Psi'(x)) \quad (4.97)$$

$$= Z(0^+)\phi^*(0^+)\Psi(0^+) - Z(0^-)\phi^*(0^-)\Psi(0^-) \quad (4.98)$$

Comencemos con la restricción

$$D(A) = \{\Psi \in AC | \Psi(0^+) = \lambda\Psi(0^-)\}; \quad (4.99)$$

ello resulta en una condición

$$\phi(0^+) = \frac{1}{\lambda^*} e^{i(\theta_+ - \theta_-)} \phi(0^-) \quad (4.100)$$

sobre el dominio del adjunto A^+ .

La regla de composición nos obliga a encajar el dominio de un operador con el rango de otro. Por tanto, la restricción 4.100 debe imponerse sobre el operador total A^+A usando $\phi = A\Psi$, esto es

$$Z(0^+)\Psi'(0^+) + W(0^+)\Psi(0^+) = \frac{e^{i(\theta_+ - \theta_-)}}{\lambda^*} (Z(0^-)\Psi'(0^-) + W(0^-)\Psi(0^-)) \quad (4.101)$$

$$\Psi'(0^+) + \mu_+\Psi(0^+) = \frac{1}{\lambda^*} \{\Psi'(0^-) + \mu_-\Psi(0^-)\} \quad (4.102)$$

$$\Psi'(0^+) = \frac{\mu_- - \lambda\lambda^*\mu_+}{\lambda^*} \Psi(0^-) + \frac{1}{\lambda^*} \Psi'(0^-) \quad (4.103)$$

En la última expresión hemos utilizado la condición 4.99 para reescribir la ecuación. Si $H(x)$ es una función escalón, $\mu_+ = -\mu_-$ esto nos lleva a la condiciones de contorno

$$\Psi(0^+) = \lambda\Psi(0^-) \quad (4.104)$$

$$\Psi'(0^+) = \frac{1 + |\lambda|^2}{\lambda^*} \mu_- \Psi(0^-) + \frac{1}{\lambda^*} \Psi'(0^-) \quad (4.105)$$

que es la condición de la δ si $\lambda = 1$, y la suma de una interacción δ y una δ' de Kurasov si solamente pedimos $\lambda \in \mathbb{R}$.

En cambio si $H(x)$ es la función constante, las condiciones quedan

$$\Psi(0^+) = \lambda\Psi(0^-) \quad (4.106)$$

$$\Psi'(0^+) = \frac{1 - |\lambda|^2}{\lambda^*} \mu_- \Psi(0^-) + \frac{1}{\lambda^*} \Psi'(0^-) \quad (4.107)$$

Si $|\lambda| = 1$ aquí tenemos las extensiones que provienen de A autoadjunto.

Obtenemos las expresiones de separación total si utilizamos otros dominios más livianos, por ejemplo si dejamos libre $\Psi(0^-)$ y anulamos

$$\Psi(0^+) = 0, \quad (4.108)$$

nos da la condición

$$Z(0^-)\Psi'(0^-) + W(0^-)\Psi(0^-) = 0 \quad (4.109)$$

y simétricamente si anulamos $\Psi(0^-)$. En el caso más amplio, dejando de imponer restricciones, y limitándonos a

$$D(A) = AC(\mathbb{R} - \{0\}) \quad (4.110)$$

se fuerzan condiciones de anulación en $D(A^+)$ y por tanto

$$\Psi'(0^-) + \mu_- \Psi(0^-) = 0 \quad (4.111)$$

$$\Psi'(0^+) + \mu_+ \Psi(0^+) = 0 \quad (4.112)$$

Hemos reproducido, pues, todas las extensiones del teorema de Kurasov a excepción de las correspondientes a $X_4 \neq 0$, las cuales necesitan explícitamente un $Z(x)$ no trivial. Tal descripción resulta oscura en teoría de extensiones, y aquí no hemos podido aún determinar claramente los dominios.

Limitémonos a un ejemplo con la $\delta^{(l)}$ de Holden-Albeverio. Heurísticamente, si tomamos una substracción $\delta^2(x) \approx 0$, de forma que $(1 + \lambda\delta)^{-1} = 1 - \lambda\delta$, podemos construir el hamiltoniano correspondiente tomando

$$Z(x) = 1 + \frac{1}{2}\lambda\delta(x) \quad (4.113)$$

con lo que

$$A = (1 + \frac{1}{2}\lambda\delta(x)) \frac{d}{dx} \quad (4.114)$$

nos construye

$$H_+ = A^+ A = -\frac{d}{dx} (1 + \lambda\delta(x)) \frac{d}{dx} \quad (4.115)$$

4.5 Aspectos métricos

Para aportar argumentos sobre el significado físico de cada extensión, resulta un ejercicio interesante estudiar las propiedades métricas que implica un operador autoadjunto. En cierto modo esto hemos hecho en el capítulo 2, relacionando geometría de un espacio con ecuaciones de scattering.

Vamos aquí a ejemplificar otro enfoque de la asociación entre geometría y álgebra de operadores, evaluando la métrica que la teoría de Connes [21, 22] asocia a un operador.

Para dar una idea de la técnica, comencemos por las extensiones autoadjuntas del operador simétrico correspondiente al momento, $P = -id/dx$ con dominio en $AC\{\mathbb{R} - \{0\}\}$. Estas vienen caracterizadas [63] por la familia uniparamétrica de condiciones de contorno

$$\Psi(0-) = \frac{1 + iA}{1 - iA} \Psi(0+) \quad (4.116)$$

con $A \in \mathbb{R}$.

Un operador autoadjunto cuyos valores propios crezcan de forma similar a los del operador momento tiene un significado geométrico bien definido, como una operación de derivación que nos sirve para establecer una distancia a la Lipzchitz:

$$d(x, y) = \max \langle x|f|x \rangle - \langle y|f|y \rangle, f \ni ||[D, f]|| \leq 1 \quad (4.117)$$

Si evaluamos explícitamente, utilizando la condición de contorno

$$\langle \Psi|[P, f]|\Psi \rangle = \langle P^+\Psi|f\Psi \rangle - \langle f^*\Psi|P\Psi \rangle = \quad (4.118)$$

$$= i \left(\int_{-\infty}^{0-} + \int_{0+}^{\infty} \right) (\Psi'^* f \Psi + \Psi^* f^* \Psi') = \quad (4.119)$$

$$= i|\Psi|^2 f|_{0+}^{0-} + i \left(\int_{-\infty}^{0-} + \int_{0+}^{\infty} \right) (\Psi^*(f^* - f)\Psi' - |\Psi|f') \quad (4.120)$$

vemos que las funciones f que nos van a dar el máximo en 4.117 son precisamente aquellas $f \in \mathbb{R}$ que cumplen $f(0^+) = f(0^-)$, y $f'(x \neq 0) = 1$. Por tanto las extensiones autoadjuntas del operador momento nos dan precisamente la distancia usual sobre la recta y en cambio, cualquier condición de contorno distinta de estas nos habría dado una distancia arbitrariamente grande entre las dos semirrectas si hubiéramos intentado aplicar la fórmula 4.117

Ahora bien, nosotros estamos interesados en operadores de la forma P^2 , y la familia de extensiones es tetraparamétrica. Los operadores P que acabamos de evaluar nos dan solo una línea en esta familia. Como hemos visto en la sección anterior, en general se parte de operadores simétricos cerrados, y se calcula para cada P el operador P^+P , que sera autoadjunto, y además coincidirá con el libre en el mismo dominio que lo hacia el operador de partida P . Resulta entonces lógico asociar a cada operador $H = P^+P$ la función distancia (x, y) sobre su espacio base impuesta por el factor P . La evaluación de 4.118 se efectuará en el dominio del operador producto H .

Figura 4.4: Metáfora de una separación
 las condiciones de contorno de Albeverio- Holden parecen corresponder a una in-
 acción del potencial en un intervalo de tamaño λ

Un operador tipo

$$Q = \frac{d}{dx} + \lambda H(x) + \mu \quad (4.121)$$

tiene un conmutador con el álgebra de funciones f esencialmente igual al que da simplemente el operador derivada, $\frac{d}{dx}$. Por tanto

la adición de un superpotencial no cambia la distancia,

y de aquí concluimos que todas los potenciales $\lambda\delta(x)$ se pueden considerar definidos sobre un mismo espacio.

Si imponemos sobre Q condiciones de contorno de anulación, $\Psi(0) = 0$, la ecuación 4.118 permanece acotada no importa cuan grande sea el salto $f(0^+) - f(0^-)$, bastando con que $|f'(x \neq 0)| < 1$. Así pues, la distancia entre puntos en distintas semirrectas se hace infinita, coincidiendo con el concepto intuitivo de separación total de los dos espacios.

Finalmente, consideremos operadores con alteración del término cinético, en particular nuestro prototípico ejemplo, la pseudo-delta de Albeverio- Holden. Sus condiciones de contorno, $\Psi(0^+) - \Psi(0^-) = \lambda\Psi'(0^+) = \lambda\Psi'(0^-)$, pueden imaginarse (figura 4.4) como la existencia de una separación λ en la que todas las funciones de onda evolucionan como la de energía cero. Esta separación es próxima a la del esquema de Carreau [17] utilizando integrales de camino con cierta probabilidad de salto entre 0^+ y 0^- .

Intentemos concretar esta metáfora utilizando el operador Q asociado al hamiltoniano de Albeverio. Con la regularización adecuada U_ϵ de la δ , éste sería:

$$Q = \lim \epsilon \rightarrow 0 \frac{1}{1 + \lambda U_\epsilon(x)} \frac{d}{dx} \quad (4.122)$$

Donde el límite debe tomarse en operadores (i.e., como *SRL*). Dado que es simplemente una derivación modificada, resulta que podemos describir el conmutador $[Q, f]$ como

$$[Q, f]\Psi = (Qf)\Psi \quad (4.123)$$

Y para que Qf esté bien definido, debe cumplir idénticas condiciones de contorno que cualquier función en el dominio de Q . Sólo que ahora tenemos además que $|f'(x \neq 0)| < 1$ si queremos utilizar f en 4.117. Entonces esta limitación del módulo del conmutador fuerza el que las funciones f puedan tener un salto absoluto $|f(0^+) - f(0^-)|$ máximo de valor λ , y una derivada f' de módulo máximo unidad.

Así pues, la función distancia correspondiente a este operador Q nos describe efectivamete dos semirrectas separadas una distancia λ

Para distinguir completamente todos los operadores, el siguiente paso dentro de este análisis métrico sería estudiar la curvatura y torsión, elementos que están directamente asociados al operador Q^2 , sin necesidad de conocer su factorización. Intuitivamente, vemos que el haber eliminado el punto del origen puede permitirnos alguna libertad en el transporte paralelo, que la recta naïf no tiene. Técnicamente, esperamos que esta construcción contenga datos del potencial utilizado, ya que la ecuación de un partner susy es muy similar a una construcción con curvatura, pero que no amplie la información topológica.

La construcción general de conexiones compatibles con la métrica en este marco algebraico se efectua utizando una representación del álgebra de funciones y un idempotente en ésta. La eliminación del origen nos ha dado dos idempotentes no triviales, correspondientes a las funciones escalón, por lo que cabe esperar que diferentes conexiones se asocien de algún modo a diferentes valores del escalón, o lo que es lo mismo, a diferentes valores del acoplo de una interacción tipo delta. La verificación de esta hipótesis es “trabajo en curso” actualmente.

Capítulo 5

Grupo de renormalización

Trabajos previos, renormalización y cambio de escala. Formulación a la Wilson. Espacio de interacciones en 1D, flujo de renormalización. Esquema para obtener potenciales puntuales. Resultados: puntos fijos y direcciones relevantes. Comparación con la solución conocida. Cómo encajan las regularizaciones usuales en este esquema. Regularizaciones exóticas.

La falta de una escala intrínseca en la descripción del problema de interacción puntual invita a intentar resolverlo con técnicas de scaling. La inspiración más inmediata son las ideas de renormalización, que ya se han aplicado con éxito en los problemas de contacto bi y tri-dimensionales [40, 38].

Sin embargo en nuestro caso no tenemos una formulación clara de los posibles regularizadores de la teoría, como hemos visto. Por ello necesitamos utilizar un tratamiento más general. La técnica adecuada es el estudio de flujos en el espacio de posibles interacciones, en un modo cercano¹ al descrito en [77, sect. 12] para renormalización de teorías de campos con cutoff. Así, consideraremos el espacio de todas las interacciones de rango finito a , y en particular el de todas las interacciones de un rango dado, digamos a_0 , que nos sirve como escala de referencia. El objeto básico de nuestra descripción va a ser la matriz S , y con ella parametrizaremos este espacio; la forma explícita de cada hamiltoniano no va a ser necesaria, aunque en bastantes casos podría recobrase resolviendo el problema inverso.

El método empleado tiene muchos puntos en común con la técnica de renormalización, pero más como una guía heurística que como una implementación rigurosa, que debería hacerse viendo la mecánica cuántica como una teoría de campos en $0 + 1$ y aplicando una regularización, por ejemplo como intenta Polonyi [61, 62] discretizando el tiempo y formulando el propagador vía integrales de camino.

No implementaremos pues elementos propios del grupo de renormalización clásico, como son la función beta, las ecuaciones de Callan-Simanzik, etc. Tales componentes se entienden mejor en una descripción con regularizaciones y constantes de acoplo explícitas, como las expuestas por los equipos de Barcelona [47, 33] y del MIT [7].

No obstante esta ausencia de regularización explícita, un producto secundario de nuestra técnica es el crear un esquema lo suficientemente amplio para su discusión, ya que cualquier familia de hamiltonianos aproximando a una interacción puntual estará descrita, si sus miembros son de rango finito, como una línea en nuestro espacio de teorías.

5.1 Renormalización y cambio de escala

Si tenemos una teoría con una escala dada a y vamos dilatando ésta, obtenemos una línea de flujo a través de un espacio de teorías en la que todos los puntos contienen la misma “física”, salvo este cambio trivial de unidades.

¹Hemos agilizado la argumentación eliminando cuando era posible las referencias a la escala a_0 , lo que nos aleja del esquema de Wilson estricto y nos acerca a Callan-Simanzik

Figura 5.1: Flujos en un espacio de interacciones
Una transformación de GR construye, a partir de la serie A, una serie renormalizada C cuyo límite cae sobre la línea B de interacciones renormalizadas. Para garantizar esto, es necesario que el punto a límite de la serie inicial caiga por GR hacia el punto fijo b origen de la línea relevante B.

Podemos emplear este flujo para conectar hamiltonianos a distintas escalas sin pérdida de información. Esta es la idea básica: nos movemos en una familia cualquiera de hamiltonianos con alcance decreciente, y utilizamos la dilatación de grupo de renormalización para obtener una serie con el mismo alcance (digamos el dado, a_0) de la que buscamos su límite. Dada una serie inicial cualquiera, no podemos garantizar que la obtenida converja, pero sí que podemos asegurar que si lo hace cae sobre ciertas líneas límite que podemos construir simplemente analizando el flujo de renormalización.

Este análisis se realiza en el espacio de teorías con una escala fijada a_0 (figura 5.1). Las líneas de renormalización cerca de puntos fijos tenderán a acercarse en ciertas direcciones “irrelevantes” al dilatar, y a alejarse de ellos en ciertas direcciones relevantes. Como la dilatación que aplicaremos a una teoría ha de ser mayor cuanto menos rango tenga, al acercarnos al límite la teoría renormalizada se encontrará cerca de una línea dominada por la dirección relevante: la línea de interacciones renormalizadas.

Lo que se garantiza, entonces, es que si existe una teoría “renormalizada”, ésta caiga sobre las líneas (los subespacios, en general) correspondientes a parámetros relevantes. Por tanto el análisis de los *puntos fijos* y las *trayectorias renormalizadas* que parten de ellos, esto es, de sus direcciones relevantes, nos basta para determinar las posibles teorías límite.

5.2 Flujo en el espacio de matrices S

5.2.1 Implementación

Asignamos a cada interacción una matriz de scattering S_k cumpliendo las propiedades expresadas en el primer capítulo, sección 1.2.2. Dado que queremos obtener interacciones puntuales como límite, exigimos además a las interacciones de partida las propiedades en 1.3.5, reflejando el alcance efectivo finito de la interacción.

No hay ninguna escala intrínseca en esta descripción, así que construimos directamente todo el espacio de matrices S sin distinciones. En todo caso, podemos pensar que este es el espacio construido refiriéndonos a una unidad de medida a_0 (pensemos $a_0=1\text{eV}$, 1cm , o simplemente 1).

La transformación une teorías con la misma física cambiando la escala. Al estar trabajando con una matriz de probabilidad de transición, $S(k)$, el cambio de escala $a \rightarrow e^t a$ es sumamente sencillo [38] pues afecta solo a k :

$$\tilde{S}_k^t = T^t[\tilde{S}_k] = \tilde{S}_{e^{-t}k} \quad (5.1)$$

Esto coincide con el *gossip* usual: dos teorías están en la misma línea de

Figura 5.2: Metáfora de un cambio de escala

La transformación de renormalización cambia la escala, en cierto sentido toda la información debajo del cutoff se ignora

flujo de renormalización cuando son versiones de la misma teoría a distintas escalas (digamos a_0 y $e^{-t}a_0$).

5.2.2 Puntos fijos

A la hora de calcular los puntos fijos bajo la transformación 5.1 hemos de tener en cuenta las restricciones sobre la matriz S citadas anteriormente, de forma que no toda matriz unitaria será candidata a punto fijo.

En concreto, el conjunto de matrices cumpliendo 1.26 y 1.28 e independientes del escalado de k (por tanto constantes) viene dado por

$$\{I_{\theta,\phi} \equiv \begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & e^{-i\theta} \cos \phi \end{pmatrix}\} \cup \{\pm q\} \quad (5.2)$$

esto es, una superficie biparamétrica y dos puntos aislados.

Los puntos de esta superficie con $\theta \neq 0$ tienen diferentes coeficientes de transmisión left y right, por tanto no son invariantes T y no entran en la teoría habitual de scattering. Si nos interesáramos sólo por teorías con simetría de inversión temporal, habríamos de añadir la restricción adicional $T^r = T^l$, 1.31, quedando

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \right\} \cup \{\pm q\} \quad (5.3)$$

Este resultado es ya de por sí interesante, ya que el círculo de interacciones obtenido es un viejo conocido nuestro: se trata de la familia $\lambda\delta'$ de Kurasov. No es raro encontrarlas aquí, ya dijimos que dimensionalmente esta interacción es invariante de escala en un sentido próximo a como ocurre con $1/x^2$, sólo que aquí no encontramos la ruptura de esta invarianza.

Además, Los puntos aislados $\pm q$ corresponden a interacciones separando totalmente las semirrectas; en particular $-q$ es la separación con condiciones de Dirichlet que hemos obtenido de los teoremas de Seba [66] citados en la sección 4.2.1.

5.2.3 Direcciones relevantes, irrelevantes, marginales

Una vez localizados los puntos fijos, necesitamos saber como se comporta el flujo cerca de éstos. Para ello estudiamos como se mueve una interacción cercana al punto fijo bajo una transformación infinitesimal de grupo de renormalización [77, ch.12]. Diagonalizamos tal transformación de forma que sus autovectores nos permitan distinguir ciertas direcciones fundamentales:

Las relevantes en las que la aplicación de la transformación de R.G. aleja la interacción del punto fijo.

Las irrelevantes, a través de las cuales la interacción cae al punto fijo.

Marginales, que no son afectadas por la dilatación del RG (al menos a primer orden)

La combinación de la acción de direcciones relevantes e irrelevantes se puede idealizar como la trayectoria de una partícula cayendo cerca de un punto silla: tiende a caer hacia el punto silla por la línea de curvatura (negativa) y a alejarse por la línea de curvatura (positiva). Las trayectorias marginales entran en este esquema cuando no son marginales exactas; una trayectoria marginal exacta corresponde a una línea de puntos fijos.

Describimos una interacción cercana a un punto fijo realizando una pequeña perturbación de su matriz S que conserve la unitariedad de ésta:

$$S^{\vec{a}} = S_0 e^{\vec{a}(k) \cdot \vec{L}} \quad (5.4)$$

con $\vec{a}(k) \in R^4$, puesto que $U(2)$ depende de cuatro parámetros reales. Para $\int \|\vec{a}_k\| dk$ lo suficientemente pequeño² podemos ponerla como

$$S^{\vec{a}} - S_0 \approx \vec{a}(k) \cdot (S_0 \vec{L}) \quad (5.5)$$

Los generadores de $U(2)$ serán

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\} \quad (5.6)$$

²A fin de no complicar excesivamente la derivación, vamos a ser poco rigurosos con esta exigencia

Así, por ejemplo, alrededor de $+q$ obtendríamos

$$S_0^{+Q}L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (5.7)$$

Y para los otros puntos fijos similarmente:

$$S_0^{-Q}L = -S_0^{+Q}L, S^{I_{0,0}}L = L, S_0^{I_{\theta,\phi}}L = \dots \quad (5.8)$$

En particular, alrededor de la identidad el conjunto (S_0L) es el propio juego L de generadores.

Naturalmente, además de garantizarnos que la matriz S sea unitaria, se deben de cumplir el resto de las condiciones elementales de S (sección 1.2.2) y debemos asegurarnos de que la nueva interacción sigue perteneciendo a nuestro espacio de interacciones admisibles. Estas restricciones son las que nos van a limitar fuertemente las direcciones propias del flujo.

Apliquemos ahora a esta matriz S una transformación de RG infinitesimal δt . Tendremos:

$$T^{\delta t}S_k = S_{e^{-\delta t}k} \approx S_k + (O_k S_k)\delta t \quad (5.9)$$

donde

$$O_k S_k = \left. \frac{\partial S_{e^{-t}k}}{\partial t} \right|_{t=0} = -S'(k)k \quad (5.10)$$

Ahora buscamos las direcciones en las que la aplicación de la transformación RG nos de otra interacción en la misma dirección, esto es, incorporamos 5.5 y 5.10 a 5.9 para obtener la ecuación de autovalores

$$-k\vec{a}'(k)S_0^{\vec{L}}\delta t = (\lambda - 1)\vec{a}(k)S_0^{\vec{L}} \quad (5.11)$$

cuya solución es

$$(\lambda - 1) = n\delta t \quad (5.12)$$

$$\vec{a}(k) = k^{-n}\vec{a}_0 \quad (5.13)$$

De los diferentes valores de λ , como se ha explicado antes dependerá el carácter relevante, irrelevante o marginal de cada dirección.

Las restricciones 1.28 y 1.26 sobre S limitan los posibles vectores \vec{a}

$$\begin{aligned} a_0(-k) &= -a_0(k) \\ a_1(-k) &= -a_1(k) \\ a_2(-k) &= a_2(k) \\ a_3(-k) &= a_3(k) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Realicemos explícitamente el análisis alrededor del punto fijo correspondiente a la ausencia de iteración, $S_k = I_0$, que es el más interesante.

En este caso los generadores de la perturbación son directamente los del grupo $U(2)$. La aplicación de la limitación anterior 5.14 a los vectores $\vec{a}(k)$ solución de 5.11 nos deja en los órdenes mas bajos de k con la siguiente base:

$$\{0, 0, 1, 0\} \quad \textit{marginal} \quad \lambda = 1 \quad (5.15)$$

$$\{0, 0, 0, 1\} \quad \textit{marginal} \quad (5.16)$$

$$\{k, 0, 0, 0\} \quad \textit{irrelevante} \quad \lambda = 1 - \delta t \quad (5.17)$$

$$\{0, k, 0, 0\} \quad \textit{irrelevante} \quad (5.18)$$

$$\{1/k, 0, 0, 0\} \quad \textit{relevante} \quad \lambda = 1 + \delta t \quad (5.19)$$

$$\{0, 1/k, 0, 0\} \quad \textit{relevante} \quad (5.20)$$

Pero no todas las combinaciones generadas aquí son admisibles, pues algunas de ellas nos llevan a matrices S de interacciones que no son de rango corto. Así, debemos imponer como restricción adicional las propiedades descritas en 1.3.5

$$\text{onda par :} \quad \tan \delta_+ \approx 1/k \quad (5.21)$$

$$\text{onda impar :} \quad \tan \delta_- \approx k \quad (5.22)$$

y esto nos obliga a descartar las combinaciones

$$\{-k, k, 0, 0\} \quad (5.23)$$

$$\{-1/k, -1/k, 0, 0\} \quad (5.24)$$

ademas de soluciones de órdenes en k más altos³, y nos deja con cuatro autovectores:

$$\{0, 0, 1, 0\} \quad \textit{marginal} \quad \lambda = 1 \quad (5.25)$$

$$\{0, 0, 0, 1\} \quad \textit{marginal} \quad \lambda = 1 \quad (5.26)$$

$$\{k, k, 0, 0\} \quad \textit{irrelevante} \quad \lambda < 1 \quad (5.27)$$

$$\{1/k, -1/k, 0, 0\} \quad \textit{relevante} \quad \lambda > 1 \quad (5.28)$$

En la siguiente sección veremos que estas cuatro direcciones corresponden a extensiones bastante conocidas: 5.25 genera el círculo de interacciones invariantes de escala de Kurasov, 5.27 es la dirección en la que la delta de

³notemos que en TCC tampoco hay una especificación general para este descarte, que debe concretarse en cada problema, ver [77]

Holden alcanza este punto fijo , y 5.28 es la dirección relevante que nos genera las interacciones $A\delta(x)$; el que esta última interacción aparezca como línea relevante (*¿efectiva?*) del hamiltoniano libre (*¿trivial?*) es un aspecto interesante de por sí sobre el que debemos volver.

De igual manera podemos proceder con el resto de los puntos fijos, e incluso podríamos no utilizar la aproximación lineal e integrar exactamente el flujo en las direcciones relevantes obtenidas para así hallar el resto de las soluciones.

5.3 Flujo de la solución conocida

Para comprender mejor esta resolución (y de paso comprobarla) podemos aplicar transformación de escala a las matrices S de las soluciones conocidas de potenciales puntuales. Veremos como los puntos estables y el comportamiento cerca de estos coincide con el calculado para las trayectorias de la teoría perturbativa.

5.3.1 Construcción de las trayectorias

Una operación de cambio de escala en la matriz S_k se limita a reescalar $k \rightarrow \lambda k$. Así, la aplicación de la transformación llevará la matriz al punto fijo $S_{k \rightarrow 0}$ y la integración hacia atrás de ésta mueve la interacción hacia $S(k \rightarrow \infty)$, proceso en el cual podríamos salirnos del espacio de interacciones válidas. Esto no ocurre para las interacciones puntuales conocidas, y por tanto podemos trazar exactamente sus trayectorias.

Tomemos una interacción dada por ejemplo en las condiciones de contorno de Carreau:

$$M_k^0 = \begin{pmatrix} \alpha + \rho & -\rho e^{i\theta} \\ -\rho e^{-i\theta} & \beta + \rho \end{pmatrix} = cte. \quad (5.29)$$

Como hemos visto en 4.1.4, su matriz de scattering es:

$$S_k = - \begin{pmatrix} \frac{2e^{-i\theta} ik\rho}{\alpha\beta - i\alpha k - i\beta k - k^2 + \alpha\rho + \beta\rho - 2ik\rho} & \frac{\alpha\beta + i\alpha k - i\beta k + k^2 + \alpha\rho + \beta\rho}{\alpha\beta - i\alpha k - i\beta k - k^2 + \alpha\rho + \beta\rho - 2ik\rho} \\ \frac{\alpha\beta - i\alpha k + i\beta k + k^2 + \alpha\rho + \beta\rho}{\alpha\beta - i\alpha k - i\beta k - k^2 + \alpha\rho + \beta\rho - 2ik\rho} & \frac{2e^{i\theta} ik\rho}{\alpha\beta - i\alpha k - i\beta k - k^2 + \alpha\rho + \beta\rho - 2ik\rho} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Si ahora movemos la escala tenemos la familia:

$$\tilde{S}_{k,a} = - \begin{pmatrix} \frac{2e^{-i\theta} i\frac{k}{a}\rho}{\alpha\beta - i\alpha\frac{k}{a} - i\beta\frac{k}{a} - (\frac{k}{a})^2 + \alpha\rho + \beta\rho - 2i\frac{k}{a}\rho} & \frac{\alpha\beta + i\alpha\frac{k}{a} - i\beta\frac{k}{a} + (\frac{k}{a})^2 + \alpha\rho + \beta\rho}{\alpha\beta - i\alpha\frac{k}{a} - i\beta\frac{k}{a} - (\frac{k}{a})^2 + \alpha\rho + \beta\rho - 2i\frac{k}{a}\rho} \\ \frac{\alpha\beta - i\alpha\frac{k}{a} + i\beta\frac{k}{a} + (\frac{k}{a})^2 + \alpha\rho + \beta\rho}{\alpha\beta - i\alpha\frac{k}{a} - i\beta\frac{k}{a} - (\frac{k}{a})^2 + \alpha\rho + \beta\rho - 2i\frac{k}{a}\rho} & \frac{2e^{i\theta} i\frac{k}{a}\rho}{\alpha\beta - i\alpha\frac{k}{a} - i\beta\frac{k}{a} - (\frac{k}{a})^2 + \alpha\rho + \beta\rho - 2i\frac{k}{a}\rho} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

Figura 5.3: Flujo en el espacio de interacciones de corto alcance
Parametrizamos este espacio con matrices S . Además de las trayectorias yendo del punto fijo $+q$ al trivial $-q$, tenemos trayectorias distinguidas hacia y desde la superficie de puntos fijos. A destacar, la δ , desde la identidad I hacia $-q$, y la $\delta^{(l)}$, de $+q$ a la identidad. Las δ' de Kursov forman un círculo en la superficie de puntos fijos, precisamente el correspondiente a interacciones con simetría de inversión temporal

Los puntos fijos que se alcanzan en $a \rightarrow 0$ o $a \rightarrow \infty$ son los admisibles clasificados anteriormente. Veamos las trayectorias correspondientes a las extensiones mas interesantes:

Trayectorias saliendo de un punto fijo

(Esto es, límites $S_k \rightarrow \infty$)

líneas saliendo de $+q$ con $\rho = 0$ Son interacciones separadas, controladas por dos parámetros uno para cada semirrecta.

$$\begin{aligned} \Delta S_a &= - \begin{pmatrix} 0 & 2 \frac{\alpha\beta - i\beta \frac{k}{a}}{\alpha\beta - i\alpha \frac{k}{a} - i\beta \frac{k}{a} - (\frac{k}{a})^2} \\ 2 \frac{\alpha\beta - i\alpha \frac{k}{a}}{\alpha\beta - i\alpha \frac{k}{a} - i\beta \frac{k}{a} - (\frac{k}{a})^2} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1 - \frac{i}{\beta} \frac{k}{a}} \\ \frac{1}{1 - \frac{i}{\alpha} \frac{k}{a}} & 0 \end{pmatrix} \approx_{a \ll 1} \begin{pmatrix} 0 & -i \frac{2\beta a}{k} \\ -i \frac{2\alpha a}{k} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.32)$$

líneas saliendo de $+q$ con $\alpha = \beta = 0$ Cuando $\theta = 0$ este es el scattering de las extensiones de Holden-Albeverio.

$$\begin{aligned} \Delta S_a &= \tilde{S}_{\tilde{k}, a} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{2e^{-i\theta} i\rho}{-\frac{k}{a} - 2i\rho} & 2 \frac{-i\rho}{-\frac{k}{a} - 2i\rho} \\ 2 \frac{-i\rho}{-\frac{k}{a} - 2i\rho} & \frac{2e^{i\theta} i\rho}{-\frac{k}{a} - 2i\rho} \end{pmatrix} = \quad (5.33) \\ &= - \begin{pmatrix} -e^{-i\theta} & 1 \\ 1 & -e^{i\theta} \end{pmatrix} \frac{1}{1 - \frac{i}{2\rho} \frac{k}{a}} \approx -i \begin{pmatrix} -e^{-i\theta} & 1 \\ 1 & -e^{i\theta} \end{pmatrix} \frac{2\rho a}{\tilde{k}} \end{aligned}$$

desde $I_{\theta,0}$ con $\rho \rightarrow \infty$ cuando hay simetría T, corresponde al potencial usual en delta de Dirac.

$$\begin{aligned} \Delta S_a &= \tilde{S}_{\tilde{k}, a} - \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-2i\frac{k}{a}} & \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-2i\frac{k}{a}} \\ \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-2i\frac{k}{a}} & \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-2i\frac{k}{a}} \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1 - \frac{2i}{(\alpha+\beta)} \frac{k}{a}} \approx - \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix} \frac{2(\alpha+\beta)a}{\tilde{k}} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Líneas llegando a un punto fijo

Corresponden a $S(k \rightarrow 0)$. para todas estas líneas definimos $\underline{a} \equiv 1/a$, de forma que $\underline{a} \ll 1$ cerca del punto fijo correspondiente. Obtenemos:

líneas llegando a I_θ , $\alpha = \beta = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta S_{\underline{a}} &= - \begin{pmatrix} \frac{-\underline{a}\tilde{k}}{-\underline{a}\tilde{k}-2i\rho} & \frac{+\underline{a}\tilde{k}}{-\underline{a}\tilde{k}-2i\rho} \\ \frac{+\underline{a}\tilde{k}}{-\underline{a}\tilde{k}-2i\rho} & \frac{-\underline{a}\tilde{k}}{-\underline{a}\tilde{k}-2i\rho} \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1 - \frac{2\rho}{i\underline{a}\tilde{k}}} \approx - \begin{pmatrix} -i & i \\ i & -i \end{pmatrix} \frac{\underline{a}\tilde{k}}{2\rho} \end{aligned} \quad (5.35)$$

líneas llegando a $-q$ con $\rho = 0$

$$\begin{aligned} \Delta S_{\underline{a}} &= - \begin{pmatrix} 0 & 2 \frac{+i\underline{a}\tilde{k} + \underline{a}\tilde{k}^2}{\alpha\beta - i\underline{a}\tilde{k} - i\beta\underline{a}\tilde{k} - \underline{a}\tilde{k}^2} \\ 2 \frac{+i\beta\underline{a}\tilde{k} + \underline{a}\tilde{k}^2}{\alpha\beta - i\underline{a}\tilde{k} - i\beta\underline{a}\tilde{k} - \underline{a}\tilde{k}^2} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & 2 \frac{+i\underline{a}\tilde{k}}{\beta - i\underline{a}\tilde{k}} \\ 2 \frac{+i\underline{a}\tilde{k}}{\alpha - i\underline{a}\tilde{k}} & 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1 - \frac{\beta}{i\underline{a}\tilde{k}}} \\ \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{i\underline{a}\tilde{k}}} & 0 \end{pmatrix} = \\ &\approx - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\beta}i \\ -\frac{2}{\alpha}i & 0 \end{pmatrix} \underline{a}\tilde{k} \end{aligned} \quad (5.36)$$

líneas llegando a $-q$ con $\rho \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Delta S_{\underline{a}} &= - \begin{pmatrix} \frac{2e^{-i\theta} i\underline{a}\tilde{k}}{\alpha + \beta - 2i\underline{a}\tilde{k}} & 2 \frac{i\underline{a}\tilde{k}}{\alpha + \beta - 2i\underline{a}\tilde{k}} \\ 2 \frac{i\underline{a}\tilde{k}}{\alpha + \beta - 2i\underline{a}\tilde{k}} & \frac{2e^{i\theta} i\underline{a}\tilde{k}}{\alpha + \beta - 2i\underline{a}\tilde{k}} \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} -e^{-i\theta} & -1 \\ -1 & -e^{i\theta} \end{pmatrix} \frac{1}{1 - \frac{(\alpha + \beta)}{2i\underline{a}\tilde{k}}} \approx -i \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 1 \\ 1 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \frac{2}{\alpha + \beta} \underline{a}\tilde{k} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Dibujamos resumidos estos resultados en la figura 5.3.

Es interesante notar que las constantes aparecen claramente en relación con la constante dimensional a que hemos utilizado para eliminar las dimensiones de k y ejecutar la transformación. Compárese con [47, 33] donde ocurren similares vinculaciones.

5.3.2 Análisis. Comparación

Vemos pues que los puntos límite de el movimiento de escalado coinciden con los fijos de la transformación definida, y que las líneas de matrices S cerca de estos puntos coinciden con las que nos dan las direcciones relevantes del estudio perturbativo.

Además las otras direcciones también se visualizan aquí:

Las direcciones marginales son las que nos llevan de una interacción invariante de escala a otra, esto es, de un punto fijo a otro infinitesimalmente cerca. Son pues, en la nomenclatura usual, direcciones *marginales exactas*, que nos indican la presencia de una línea (en este caso, si incluimos las no invariantes T, una superficie) de puntos fijos.

Las direcciones irrelevantes en este modelo son direcciones de llegada de líneas relevantes de otros puntos fijos. Ignoramos si este es un fenómeno general o si se debe a la elevada simplicidad de este modelo⁴.

Un detalle satisfactorio es que no aparecen las dimensiones que hemos descartado, y que conocemos al menos un método de obtenerlas. En efecto, estas interacciones difieren de las aceptadas en un cambio de signo de los coeficientes de reflexión, y hemos visto en el final del primer capítulo como la interacción 1.91 se obtenía a partir de la δ de esta forma, resultando ser una interacción de rango medio y “anómala” en cierto sentido.

5.4 Flujo de las regularizaciones

Ya hemos visto que las trayectorias relevantes en el espacio de teorías corresponden a las interacciones de contacto. Podemos ahora aprovechar el resto de la estructura de este espacio para analizar el comportamiento de las regularizaciones.

Recordemos que el triángulo de renormalización (figura 5.1) descompone la operación de renormalización en una modificación de las constantes más una dilatación de la teoría, por decirlo así.

5.4.1 Regularización usual

ejemplo de la delta y su derivada

Veamos como se realiza esta operación en el caso de la delta, trabajando con regularización dos deltas:

$$V_a = \frac{g}{2a}(\delta(x+a) - \delta(x-a)) \quad (5.38)$$

las condiciones de matching, por ejemplo para la solución *left*, son

$$\frac{2ika}{g}((A-1)e^{-ika} - (B-R^l)e^{ika}) = e^{-ika} + R^l e^{ika} = Ae^{-ika} + Be^{ika} \quad (5.39)$$

$$-\frac{2ika}{g}(Be^{-ika} - (A-T^l)e^{ika}) = T^l e^{ika} = Be^{-ika} + Ae^{ika} \quad (5.40)$$

⁴Recordemos que algunas de estas interacciones admiten emparejamientos con construcciones supersimétricas, por ejemplo

y la matriz de scattering resulta ser:

$$S_k^a = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - (\frac{g}{4ak})^2 (e^{4ika} - 1)} & \dots \\ e^{-2ika} \frac{(e^{4ika} - 1)(1 - \frac{ig}{4ak})}{\frac{4ak}{ig} + \frac{ig}{4ak} (e^{4ika} - 1)} & \frac{1}{1 - (\frac{g}{4ak})^2 (e^{4ika} - 1)} \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

que vemos va a $-q$ al llevar $a \rightarrow 0$.

Interpretando la operación realizado como triángulo de renormalización, lo que habríamos hecho es aplicar un transformación de escalado a la serie

$$\tilde{S}_k^a = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - (\frac{g}{4k})^2 (e^{4ik} - 1)} & \dots \\ \frac{(e^{2ik} - e^{-2ik})(1 - \frac{ig}{4k})}{\frac{4k}{ig} + \frac{ig}{4k} (e^{4ik} - 1)} & \frac{1}{1 - (\frac{g}{4k})^2 (e^{4ik} - 1)} \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

(que es este caso era una serie constante) Observamos que

$$\tilde{S}_k^{a \rightarrow 0} = \tilde{S}_k^a \quad \tilde{S}_{k \rightarrow 0}^a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

Esto es, tanto el punto límite de la serie como *cada uno* de sus términos estaban en la órbita del punto fijo $-q$, y lógicamente la interacción renormalizada ingenuamente ha caído hacia este punto⁵.

5.4.2 Renormalización de la cte de acoplo

Para salir del atasco necesitamos corregir trayectorias más astutas. Para ello, introducimos una dependencia en a para la constante de acoplo, y buscamos una $g(a)$ que nos dé un límite no trivial al corregir. Desde luego en este ejemplo podemos ya leer la respuesta en (5.41) ya que el mecanismo de RG en mecánica cuántica es demasiado simple[38] para obtener diferencias remarcables. Prosigamos metódicamente de todas maneras:

Necesitamos obtener una serie $\tilde{S}^a \equiv S_{k/a}(g(a))$ tal que el punto límite $a \rightarrow 0$ caiga en el dominio de atracción de un punto fijo no trivial. Cualquier $g(a)$ que vaya a cero cuando $a \rightarrow 0$ nos hará el papel, pues caerá directamente en el punto fijo $I_{0,0}$. Además, queremos que la correspondiente serie renormalizada $T^{-\log t(a)} \tilde{S}^a$ tenga un límite no trivial. Esto se fuerza de la

⁵Quizás lo que hemos hecho sería más visual pensando en la regularización de pozo para la delta. En este caso construiríamos una serie de pozos decreciendo de forma que la serie tienda al hamiltoniano libre. La corrección de renormalización adecuada nos daría entonces la serie usual de pozos con anchura constante. Una aplicación corta o defectuosa de la dilatación de renormalización nos produciría una serie bien cayendo aun al libre, bien tendiendo a la separación total con condiciones de Dirichlet.

manera usual, requiriendo que no haya dependencia en a en el límite, lo que se obtiene poniendo

$$t(a) = \alpha g^2(a) \quad (5.44)$$

y entonces

$$\lim_{a \rightarrow 0} T^{-\log t(a)} \tilde{S}_k^a(g(a)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - (\frac{1}{\alpha k})} & \frac{1}{(\alpha k) - 1} \\ \frac{1}{(\alpha k) - 1} & \frac{1}{1 - (\frac{1}{\alpha k})} \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

que es ni más ni menos la matriz de scattering por un potencial δ . Hemos obtenido pues una derivación alternativa del resultado de Seba [66]: cualquier renormalización de la interacción doble delta impar a través de la constante de acoplo nos lleva a una interacción $\delta(x)$. Por supuesto, si ponemos $t(a) = a/a_0$, como viene dado por el escalado usual, obtenemos

$$g(a) = \frac{1}{a_0 \alpha} a^{1/2} \quad (5.46)$$

5.4.3 Regularización con potenciales admisibles

La experiencia con el ejemplo anterior nos permite desplegar una conclusión más general: toda regularización con potenciales cumpliendo

$$S_{k \rightarrow 0} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

$$S_{k \rightarrow \infty} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

sólo permite construir triángulos de renormalización apoyados sobre la delta $\lambda \delta(x)$. Pero estas condiciones son justamente el comportamiento usual (salvo umbrales anómalos en $k = 0$) de un potencial L^2 . Por tanto, esto es justamente una una formulación en teoría de GR del resultado fuerte de Seba [66]. Es de hecho un poco mas amplia, ya que no exige que el potencial sea de integral nula.

A partir de aquí es cuando podemos realmente plantearnos cómo regularizar teorías correspondientes al resto de las extensiones autoadjuntas clasificadas en la sección 4.1.2

5.4.4 Regularizadores exóticos

Como recapitulación, reexaminemos las posibilidades de regularización que han quedado a nuestro alcance. Para romper las limitaciones vistas en la sección anterior, vemos varias posibilidades: alteración del término

cinético, introducción de potenciales dependientes de la velocidad (ver por ejemplo propiedades en [27]) o no locales, utilización de potenciales fuera de la clase de integración L_2^1

En cualquiera de estos casos, queda pendiente de estudiar como readaptar, si es necesario, nuestro espacio de interacciones para incluirlos. Acabamos pues este capítulo con una pequeña muestra de los hechos que conocemos sobre ellos.

Entre los posibles candidatos se encuentran los potenciales “intermedios” descritos por Newton y Aktosun [2], que ya hemos visto en 1.3.5. A su favor tienen el comportamiento asintótico anómalo, que podría permitir caer sobre otros puntos fijos. Pero a cambio hay que ampliar el espacio de interacciones para admitirlos.

Un grupo interesante entre estos ejemplos son los ya mencionados de 1.4.4, que tienen alguna conexión con las direcciones que hemos descartado, ya que aparecen cambiando el signo de los coeficientes de reflexión correspondientes a alguna de las interacciones renormalizadas.

Otra alternativa a considerar es la regularización natural de la delta,

$$V_\epsilon = \Re \frac{1}{x} \ln \frac{\epsilon + x}{\epsilon - x} \quad (5.49)$$

que se obtiene como el kernel de convolución del cuadrado, F^2 , de la transformada de Hilbert

$$F\Psi = v.p.C. \int \frac{1}{x-y} \Psi(y) dx \quad (5.50)$$

al regularizarla para tomar el valor principal de Cauchy. Este operador F aparece en la resolución de problemas de Riemann-Hilbert, pero resulta más interesante verlo como un operador de diferenciación, $df = [F, f]$, en la formulación geométrica de Connes para \mathbb{R} ; de hecho se obtiene simplemente como el operador signo $[\frac{d}{dx}]$.

Que esta serie regulariza la delta es claro por el hecho de que $F^2 = I$. No obstante, calculemos explícitamente el área de la parte de V_ϵ conteniendo las singularidades. La integral indefinida de 5.49 es, para $|\frac{x}{\epsilon}| < 1$,

$$\ln \epsilon + \ln x + \frac{x}{\epsilon} \Phi(-\frac{x}{\epsilon}, 2, 1) - \ln \epsilon - \ln x + \frac{x}{\epsilon} \Phi(\frac{x}{\epsilon}, 2, 1) \quad (5.51)$$

con $\Phi(z, s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (v+n)^{-s} z^n$, lo que nos deja

$$\int = 2 \frac{x}{\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^2} (\frac{x}{\epsilon})^{2n} \quad (5.52)$$

Luego evaluando en su soporte, ie, entre $\pm\epsilon$, tenemos

$$\int = \lim_{x \rightarrow 1} 4x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^2} x^{2n} = \frac{\pi^2}{2} \quad (5.53)$$

Finalmente, mencionemos la sugerencia de Seba [66] en la que muestra que la $\delta^{(l)}$ se puede describir con el Hamiltoniano

$$-\frac{d^2}{dx} + \lambda|\delta' \gg \delta'| \quad (5.54)$$

con una cierta renormalización de la cte. de acoplo λ . Este término potencial es bastante similar a los que hemos propuesto en el capítulo 4, basta con verlo en la forma

$$V = \frac{d}{dx} \lambda \delta(x) \frac{d}{dx} \quad (5.55)$$

para que la equivalencia sea casi total. No obstante, cierto trabajo es necesario para saltar de una formulación a otra: esta λ es un coeficiente renormalizado infinitesimal, mientras que la F de 4.88 y el acoplo de 4.20 son números finitos normales.

Conclusiones

El área de conocimiento en la que se enclava nuestro trabajo es uno de los pilares de la teoría contemporánea de mecánica cuántica, y por tanto nos hemos encontrado en un espacio muy amplio, con gran riqueza de resultados a examinar. Con ello, nuestros resultados se dispersan en varios campos y quedan abiertos a futuro desarrollo.

Esperamos que la lectura de esta memoria proporcione al menos algunos puntos sugerentes. A título personal, destacaríamos los siguientes rasgos:

- La importancia de la formulación de Newton, al menos en el ámbito de problemas 1D. No sólo por su construcción de la matriz de Jost simplificando los problemas a la manera del planteamiento tridimensional. Por ejemplo, hemos visto como la insistencia en la caracterización abstracta de la matriz S nos ha permitido construir las familias de interacciones puntuales sin necesidad de formular explícitamente hamiltonianos.
- El énfasis en la importancia de SUSY fuera de su ámbito original de teoría de campos. La presencia de esta simetría ha sido un “leit motiv” en toda la memoria, en unos casos como guía heurística de construcción, en otros –y esto es más remarcable– como la forma básica de resolver un problema mecánico-cuántico, utilizando factorizaciones y estructuras con una dualidad de tipo susy.
- Se ha ilustrado la utilidad del trabajo puramente numérico en el espectro continuo y matriz de scattering, verificando en el problema unidimensional ideas que se esbozaron, a nivel de desarrollos perturbativos, en la década de los setenta. Nos ha alegrado poder dar con un esfuerzo de cálculo razonable ejemplos de las propiedades que caben esperarse del escalado de una interacción, las cuales podrían ser aplicadas por ejemplo en la linearización de problemas con lattices de interacciones, etc.
- Hemos analizado con detalle la estructura de las interacciones puntuales, creemos que superando el debate creado por los trabajos de Albeverio et al. Nuestro análisis no se ha querido limitar sólo a una técnica específica, y por ello es lo suficientemente detallado para ofrecer apoyos menos problemáticos a los que quieran desarrollar aplicaciones con estos potenciales.
- En la parte final del trabajo hemos proporcionado un esquema donde estudiar problemas de reguladores en mecánica cuántica, desarrollando un ejemplo unidimensional que es en gran medida generalizable a otros problemas. El comprobar que gran parte de las ideas de Wilson y Kogut eran directamente implementables en un ejemplo tan

didáctico como la interacción puntual ha representado una gran satisfacción.

- Por último, nuestra pequeña contribución a las relaciones entre la teoría algebraica de operadores de Schrödinger y la práctica geométrica. Esto es algo que está siendo reivindicado en la actualidad como una necesidad para la simplificación de la teoría cuántica de campos. Más modestamente, hemos aportado ilustraciones de estas relaciones en dos puntos:

–El análisis de un espacio simétrico utilizando laplacianos inducidos de forma natural sobre él.

–La relación entre operadores diferenciales en la línea real y las posibles distancias que se pueden definir entre sus puntos.

En ambos casos el descubrir una factorización adecuada de los operadores en cuestión resulta ser la clave para poder abordar el problema.

Creemos que la memoria presentada resulta lo suficiente completa para iniciar rápidamente a alguien que quiera entremeterse en los problemas de scattering y llegar presto al punto sobre el que desarrollar soluciones. Y eventualmente cerrar algunas de las carpetas que hemos dejado abiertas.

Apéndices

Procesos computacionales utilizados

Cálculo de los niveles de energía

La ecuación de Schrödinger se resuelve numéricamente en un intervalo utilizando algoritmos llamados “de disparo”, que ajustan condiciones de contorno en un extremo e integran la ecuación hasta el otro. Si las condiciones en éste no son las deseadas, se reajustan las condiciones iniciales hasta conseguir el objetivo. En la mayoría de los casos se exige simplemente que la solución sea próxima a cero en un par de puntos lejos de la zona donde se localiza el potencial; otra alternativa es pedir que sea de tipo exponencial fuera del soporte de éste.

En nuestro caso implementamos estos cálculos a través de modificaciones de programas FORTRAN escritos por Salcedo *et al.*⁶ (para orientación al *state-of-art* actual, ver por ejemplo referencias en [36] y [28]). Los programas fueron preparados originariamente para dar tanto los autovalores como las autofunciones, y dado que en este caso solo nos interesan los autovalores el programa, los modificamos en consecuencia. La dependencia en la constante de acoplo ha sido implementada también en el procedimiento que define el potencial, y un sistema de proceso en batch escrito en VAX DCL permite recompilar el programa para ir realizando cálculos del espectro variando ligeramente el potencial en cada ciclo.

El cálculo de los defasajes se efectúa de manera similar.

Visualización de plots

Los datos de salida del programa anterior están ordenados por intensidad de acoplo. Un pequeño proceso se encarga de reordenarlos por niveles, formando líneas que muestran la dependencia de cada nivel con la cte de acoplo.

Estas líneas se visualizan agrupadas con un programa gráfico estándar, en nuestro caso PROPLOT. El mismo batch que se encarga de reordenar los resultados por niveles se preocupa de dar el formato de fichero valido como entrada a Proplot y ejecutarlo.

Visualización de trayectorias de polos en Mathematica

Los gráficos de trayectorias de polos se han calculado numéricamente en Mathematica [78], lo que permitía obtener el gráfico correspondiente a la vez que se ejecutaba el cálculo. Este método, aunque más lento en tiempo de proceso, resulta más ágil cuando es necesario conseguir una visualización

⁶Vease [64] para referencia a la version original

adecuada, esto es, localizar un área del plano que muestre todos los sucesos interesantes.

Dado que queríamos representar movimientos de los polos de S , la aproximación más sencilla resultaba ser el tomar los puntos donde la función de Jost se anula. Esto es, calcular la función implícita $J(k, g) = 0$. En los casos de una y dos deltas se despejaba previamente $k(g)$ y se trazaba exactamente. En el resto de gráficas se ha dejado la función en forma implícita en manos de las funciones de plot bidimensional de Mathematica.

Otras técnicas para el estudio de polologías con Mathematica pueden verse en [68]

Otros cálculos simbólicos

En algunas de las fórmulas “farragosas” se han realizado tests cruzados con Mathematica para verificar la exactitud de signos, simplificaciones, etc. Encontramos que en el caso de operaciones polinómicas (determinantes de matrices pequeñas, por ejemplo) el sistema es eficiente, pero en casos más complicados es necesario utilizar evaluación numérica.

Las inversiones de matrices, así como los sistemas de ecuaciones pequeños, sí resultan cómodos en este lenguaje. En particular los pasos de matriz de scattering a matriz de condiciones de contorno, y las transformaciones entre distintas matrices de condiciones de contorno, son bastante ágiles.

Conviene recordar en este sentido que la parte manipuladora de Mathematica no es más que una notación amigable de LISP, así que no hay por que esperar mejor comportamiento simbólico que con otros programas clásicos.

Procesado y composición del texto

El texto ha sido compuesto utilizando $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, en concreto los dialectos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 2.09 y $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 2_ε, bajo sistemas operativos SunOS y Linux. El output en PostScript se ha impreso en una LaserWriter Personal NT. Todas las erratas son del autor.

Notación

Por comodidad y como referencía resumimos en esta página símbolos y notación frecuente en el texto.

matrices y vectores constantes

$$q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

funciones, funciones generalizadas, y asimilados

$H(x)$ es la función escalón de Heaviside

δ es la delta de Dirac

δ' es la derivada de la delta de Dirac

$\delta^{(l)}$ es la delta de Albeverio-Holden

operaciones

\Re, \Im es tomar la parte real o imaginaria, respectivamente, de un número.

$*$ es la conjugación compleja, T es transposición; \dagger es el hermítico conjugado, la combinación de ambas. Cuando se trata de un operador adjunto, usamos preferentemente $+$ en vez de la anterior.

convenios y varia

Ψ, Φ suelen representar funciones de ondas solución de la ecuación de Schrödinger. ϕ, ψ, φ se utilizan representando pares de funciones de ondas, en notación vectorial.

Los símbolos $+$ y $-$, usados como índice o subíndice, tienen varios significados, dependiendo del contexto:

- Marcar onda par e impar (resp.) en soluciones de la ecuación de ondas.
- Como subíndices, etiquetar un par de hamiltonianos supersimétricos
- Indicar aproximación a un punto por la derecha o por la izquierda.

Evitamos utilizarlos en los casos donde puede haber confusión.

H sin ninguna dependencia funcional refiere a un hamiltoniano cuántico. S_k y $S(k)$ se refieren ambas a la matriz S . La segunda notación se emplea bien cuando se estudian propiedades analíticas, bien cuando se está realizando alguna operación en 3D con simetría bajo rotación.

Los espacios L_σ^n agrupan clases de funciones con ciertas propiedades de integrabilidad. En concreto

$$L_\sigma^1 \equiv \left\{ f(x) \mid \int_{\mathbb{R}} dx |f(x)| (1 + |x|^\sigma) < \infty \right\}$$

Si $\sigma = 0$ obviamos el subíndice, pues se trata entonces de las normas L^n usuales.

Índice de Figuras

none	
2.1	Empalme de varios pares susy en escalera 56
2.2	Emparejamientos Susy en el espacio de parámetros $m_\alpha, m_{2\alpha}$ 61
3.1	Variación de la energía de ligadura con respecto a la constante de acoplo para algunos potenciales regulares de corto rango 67
3.2	Variación de la energía de ligadura con respecto a la constante de acoplo para potenciales singulares 68
3.3	Variación de la energía de ligadura con respecto a la constante de acoplo en un potencial de Coulomb 69
3.4	Desfases $\delta_\pm(k)$ del potencial sech^2 para diversos valores de la constante de acoplo 72
3.5	Polos de la matriz S del pozo cuadrado 74
3.6	Polología de la onda par de la barrera cuadrada de potencial 75
3.7	Polología sencilla: el potencial delta 76
3.8	Polología de la doble delta. Onda par 77
3.9	Polología de la doble delta. Onda impar 78
3.10	Polología correspondiente al potencial con tres deltas 79
4.1	Aproximación lineal en una regularización con dos deltas . . 93
4.2	Dos espacios topológicamente indistinguidos 95
4.3	Algunos otros espacios 1D 96
4.4	Metáfora de una separación 106
5.1	Flujos en un espacio de interacciones 112
5.2	Metáfora de un cambio de escala 114
5.3	Flujo en el espacio de interacciones de corto alcance 119

Bibliografía

- [1] T. Aktosun. Examples of non-uniqueness in one-dimensional inverse scattering for which $T(k) = O(k^3)$ and $O(k^4)$ as $k \rightarrow 0$. *Inverse Problems*, 3:L1–L3, 1987.
- [2] T. Aktosun and R.G. Newton. Non-uniqueness in the one-dimensional inverse scattering problem. *Inverse Problems*, 1:291, 1985.
- [3] Tuncay Aktosun. Exact solutions of the Schrödinger equation and the non-uniqueness of inverse scattering on the line. *Inverse Problems*, 4:347–352, 1988.
- [4] S. Albeverio et al. *Solvable Models in Quantum Mechanics*. Springer, New York, 1988.
- [5] Y. Alhassid, F. Gürsen, and F. Iachello. *Phys Rev Letters*, 50:873, 1983.
- [6] S. Alveberio, F. Gesztesy, and H. Holden. Comments on a recent note on the Schrödinger equation with a δ' -interaction. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:3903–3904, 1993.
- [7] G. Amelino-Camelia and D. Bah. Schrödinger self-adjoint extension and quantum field theory. Technical Report MIT-CTP-2329, MIT, 1994.
- [8] E. Avron, P. Exner, and Y. Last. Periodic Schrödinger operators with large gaps and Wannier-Stark ladder. *Phys Rev Letters*, 72(6):896, 1994.
- [9] H.A. Bethe and P. Morrison. *Elementary Nuclear Theory*.
- [10] L.J. Boya. Supersymmetric quantum mechanics: two simple examples. *European Journal of Physics*, 9:139–144, 1988.

- [11] L.J. Boya. Supersymmetric quantum mechanics and critical potentials. *Anales de Física A*, 86:40, 1990.
- [12] L.J. Boya, J. Casahorrán, and J.G. Esteve. Anomalous SUSY QM, heterotic models and scattering states. *Mod Phys Lett A*, 7(25):2325, 1992.
- [13] L.J. Boya and E.C.G. Sudarshan. Point interactions from flux conservation. preprint CPP-94-28, Texas U., 1994.
- [14] L.J. Boya, R.F. Wehrhahn, and A. Rivero. Supersymmetry and geometric motion. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:5825–5834, 1993. Also see DFTUZ 9306.
- [15] D. Buchholz and R. Verch. Scaling algebras and renormalization group in algebraic QFT. Technical Report 95-004, DESY, 1995. Also hep-th/9501063.
- [16] M. Carreau. Four-parameter point-interaction in 1D quantum systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:427–432, 1993.
- [17] M. Carreau, E. Farhi, and S. Gutmann. Functional integral for a free particle in a box. *Physical Review D*, 41(4):1194, 1990.
- [18] K. Chadan and P.C. Sabatier. *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory*. Springer, New York, 1977.
- [19] P.R. Chernoff. A new class of point interactions in one dimension. *Journal of Functional Analysis*, 111:97–117, 1993.
- [20] A. Connes. Compact metric spaces, Fredholm modules and hyperfiniteness. *Ergodic. Theor. and Dynam. Systems*, 9:207, 1989.
- [21] A. Connes. Non commutative geometry and physics. Technical Report M/93/32, IHES, 1993.
- [22] A. Connes. *Non Commutative Geometry*. Academic Press, 1994. Resumen en IHES/M/93/32; draft en IHES/M/93/12.
- [23] A. Degasperis and P.C. Sabatier. Extension of one dimensional scattering theory, and ambiguities. *Inverse Problems*, 3:73–109, 1987.
- [24] P. Deift and E. Trubowitz. Inverse scattering on the line. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXXII:121–251, 1979.

- [25] P. Deift and X. Zhou. Direct and inverse scattering on the line with arbitrary singularities. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLIV:485–533.
- [26] L.D. Fadeev. Properties of the S matrix of the 1-d Schrödinger equation. *Amer Math Soc (2)*, 65:139, 1964. See review in [18].
- [27] E.M. Ferreira, N. Guillen, and J. Sesma. Properties of the S matrix for velocity-dependent potentials. *J. Math. Phys*, 9(8):1210, 1968.
- [28] J. Frutos and J.M. Sanz-Serna. An easily implementable four-order method for the time integration of wave problems. Report 1991/2, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid.
- [29] A Galindo and P Pascual. *Nuovo Cimento A*, 30:111, 1975.
- [30] A. Galindo and P. Pascual. *Mecánica Cuántica*. UNIVERSIDAD-Manuales. EUDEMA, 1989. English traslation bei Springer Verlag.
- [31] F. Gesztesy, G.M. Graf, and B.Simon. The ground state energy of schroödinger operators. *Comm Math Phys*, 150:375–384, 1992.
- [32] F. Gesztesy and H. Holden. A new class of solvable models in quantum mechanics describing point interactions on the line. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 9:5157–5177, 1987.
- [33] P. Gosdzinsky and R. Tarrach. Learning QFT from elementary QM. *Amer J Phys*, 59:70, 1990.
- [34] K. Gottfried. *Quantum Mechanics*. Benjamin, New York, 1966.
- [35] G.M. Graf and B. Simon. Asymptotic series for the ground state enery of Schrödinger operators. *Journal of Functional Analysis*, 112:442–446, 1993.
- [36] R.C. Greenhow and J.D. Matthew. Continuum computer solutions of the Schrödinger equation. *Am. J. Phys*, 60(1p7):655, 1992.
- [37] D.J. Griffiths. Boundary conditions at the derivative of a delta function. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:2265–2267, 1993.
- [38] K.S. Gupta and S.G. Rajeev. Renormalization in quantum mechanics. *Physical Review D*, 48:5940, 1993. Also avalaible as hep-th/9305052.
- [39] S. Helgason. *Groups and Geometric Analysis*. Academic Press, New York, 1985.

- [40] R. Jackiw. Delta-function potentials in 2 and 3-dim quantum mechanics. In *MAB Beg Memorial Volume*, Singapore, 1991. World Scientific.
- [41] R. Jost. Über die falschen Nullstellen der Eigenwerte der S -Matrix. *Helv. Phys. Acta*, 20:256–266, 1947.
- [42] P. Kurasov. Distributions theory for the discontinuous test functions and differential operators with the generalized coefficients. Technical Report 1994-11, Dept. Mathematics, Lulea Univ. of Technology, Sweden.
- [43] P. Kurasov. On the δ' -interaction in one dimension. Technical Report MSI 93-7, 1993.
- [44] L.D. Landau and E. Lifshitz. *Quantum Mechanics*. Pergamon, Oxford, 1963.
- [45] H.J. Lipkin. *Quantum Mechanics*. North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [46] S.T. Ma. On a general condition of heisenberg for the S Matrix. *Physical Review*, 71:195, 1947. Ver tambien letter en Phys Rev 69:668.
- [47] C. Manuel and R. Tarrach. Perturbative renormalization in quantum mechanics. *Phys Lett B*, 328:113–118, 1994. Also in electronic form from hep-th/9309013.
- [48] I. Moerdijk. Foliations, grupoids and Grothendieck etendues. Publicaciones del Seminario Matematico Garcia de Galdeano secc 3 n 17, Universidad de Zaragoza, 1993.
- [49] Nakamura. Low energy asymptotics for Schrödinger operators with slowly decreasing potentials.
- [50] C.A. Nelson, A.K. Rajagopal, and C. Shastri. Relation between the singularities of the S matrix and the L^2 class of solutions in potential theory. *J. Math. Phys*, 12(4):737, 1971.
- [51] R.G. Newton. Inverse scattering. I. One dimension. *J. Math. Phys*, 21:493, 1980.
- [52] R.G. Newton. *Scattering Theory of waves and Particles*. Springer, Berlin, 1982.
- [53] R.G. Newton. Inverse scattering by a local impurity in a periodic potential in one dimension. *J. Math. Phys*, 24(8):2152, 1983.

- [54] R.G. Newton. Remarks on inverse scattering in one dimension. *J. Math. Phys*, 25(10):2991, 1984.
- [55] R.G. Newton. Inverse scattering by a local impurity in a periodic potential in one dimension, II. *J. Math. Phys*, 26(8):311, 1985.
- [56] R.G. Newton. Low energy scattering for medium-range potentials. *J. Math. Phys*, 27(11):2720, 1986.
- [57] H.M. Nussenzveig. The poles of the S-matrix of a rectangular potential well or barrier. *Nuclear Physics*, 11:409–521, 1959.
- [58] H.M. Nussenzveig. *Causality and Dispersion Relations*. Academic Press, New York, 1972.
- [59] A.M. Perelomov and M.A. Olshanetski. *Phys. Rep.*, 94:303, 1983.
- [60] J. Polchinski. Renormalization and effective lagrangians. *Nuclear Phys B*, 231:269–295, 1984.
- [61] J. Polonyi. Renormalization group and continuum limit in quantum mechanics. Technical Report HEP-TH, 1994. December 7.
- [62] J. Polonyi. Renormalization group in quantum mechanics. report LPT94-4, Luis Pasteur University, Strasbourg, 1994. Also available as hep-th/9409004.
- [63] M. Reed and B. Simon. *MMMP II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press, 1975.
- [64] Salcedo et al. ? *Communications on Comp. Physics*, (1975).
- [65] P. Seba. The generalized point interaction in one dimension. *Czech. J. Phys.*, B 36:667, 1986.
- [66] P. Seba. Some remarks on the δ' -interaction in one dimension. *Reports on Mathematical Physics*, 24:111, 1986.
- [67] J. Sesma. Charts of modulus and phase of the S matrix. *Am. J. Phys*, 57(8):737, 1989.
- [68] P. Singh and William J. Thompson. Exploring the complex plane: Green functions, Hilbert transforms, etc. *Computers in Physics*, 7(4):388, 1993.
- [69] R. Tarrach. Renormalizacion en mecánica cuántica. Lecture Notes, I EIFT School, Compostela, Septiembre 1993.

- [70] T.A. Weber, C.L. Hammer, and V.S. Zidella. Resonances and analyticity of scattering wave function for square-well-type potentials. *Am. J. Phys*, 50(9):839, 1982.
- [71] R.F. Wehrhahn. Scattering influenced by symmetry. *Phys Rev Letters*, 65:1294, 0.
- [72] R.F. Wehrhahn and Y.B. Melnik. Quantum mechanics inversion for symmetry scattering. Technical Report 92-154, DESY, 1992.
- [73] R.F. Wehrhahn, Y.F. Smirnov, and A.M. Shirokov. Symmetry scattering on the hyperboloid $SO(2, 1)/SO(2)$ in different coordinate systems. *J. Math. Phys*, 33(7):2384, 1992.
- [74] R.F. Wehrhahn, Y.F. Smirnov, and A.M. Shirokov. Symmetry scattering. *J. Math. Phys*, 32:3254, 991.
- [75] Kenneth G. Wilson. Renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem. *Reviews of Modern Physics*, 47(4):773, 1975.
- [76] K.G. Wilson. Model of coupling-constant renormalization. *Physical Review D*, 2(8):1438, 1970.
- [77] K.G. Wilson and J. Kogut. The renormalization group and the ϵ expansion. *Physics Reports*, 12(2):75, 1974.
- [78] S. Wolfram. *Mathematica*. Addison-Wesley, 1991.
- [79] B. Zhao. Comments on the Schrödinger equation with δ' - interaction in one dimension. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 25:L617–L618, 1992.